

# AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO FATOR DE LOCALIZAÇÃO E RANK MEDIANO NO VALOR DO MÓDULO DE WEIBULL EM MATERIAIS FRÁGEIS<sup>1</sup>

Eduardo Atem de Carvalho<sup>2</sup>

## Resumo

Este trabalho avaliou a influência do fator ou parâmetro de localização ( $\delta$ ) e de diversas expressões que podem ser usadas para se definir os valores dos ranks de probabilidades das amostras estudadas nas estimativas do Módulo de Weibull ( $\beta$ ) em um lote de 71 amostras de uma cerâmica vermelha, quando se emprega o Método Gráfico de Probabilidade como estimador dos parâmetros desta distribuição estatística. Sub-lotes deste lote maior foram criados para se avaliar também o impacto do tamanho da amostra nestas estimativas. Para este lote foi encontrado uma diferença de quase 15% no valor de  $\beta$  devido ao uso das diversas formulações de rank. A hipótese de  $\delta \neq 0$  alterou drasticamente os valores de  $\beta$  e  $\theta$  e tornou necessário a introdução de outros elementos para que se pudesse chegar a conclusão sobre a validade da mesma.

**Palavras-chave:** Distribuição de Weibull; Parâmetro de localização; Rank de probabilidade.

## EVALUATION OF THE MEDIAN RANK AND LOCATION FACTOR INFLUENCE OVER WEIBULL MODULUS IN BRITTLE MATERIALS

## Abstract

This work dealt with the influence of the location ( $\delta$ ) parameter and several expressions that may be used to define probability rank, over Weibull Modulus ( $\beta$ ) estimates for a sample analysis. A sample containing 71 red-ceramic specimens was used together with Probability Plot method to estimate distribution parameters. Sub-lots extracted from this major lot were created to evaluate sample size impact over factor estimations. For this lot a 15% difference was found for  $\beta$  value when different rank expressions were used. The  $\delta \neq 0$  hypothesis drastically altered  $\beta$  and  $\theta$  values and made necessary the introduction of other analytical elements to allow for a final valid conclusion.

**Key-words:** Weibull distribution; Location parameter; Probability rank

<sup>1</sup> Contribuição técnica ao 62º Congresso Anual da ABM – Internacional, 23 a 27 de julho de 2007, Vitória – ES, Brasil.

<sup>2</sup> Professor Associado – LAMAV/CCT/UENF – Av. Alberto Lamego, 2000 – Horto – Campos dos Goytacazes/RJ – CEP 28013-600 – eatem@uenf.br

## 1 INTRODUÇÃO

O modelo de Weibull tem sido usado em grande número de trabalhos científicos<sup>[1-3]</sup> devido em grande parte a sua flexibilidade em se adaptar às diversas distribuições de frequência acumuladas, bem como sua adequação ímpar ao controle de processos que envolvam falhas de materiais ou peças ao longo do tempo.<sup>[4]</sup> Antes de ser usada em testes para determinação de vida útil a distribuição de Weibull era conhecida como a distribuição Fisher-Tippett Tipo III dos menores valores ou também como a distribuição da terceira assintótica dos menores valores extremos.<sup>[5]</sup> Ao longo do tempo este modelo passou a ser empregado por diversas áreas do conhecimento e descreve até uma propriedade de materiais frágeis, o Módulo de Weibull.<sup>[6]</sup>

Este trabalho se propõe a analisar os efeitos da seleção de dois fatores cujos efeitos sobre os parâmetros obtidos são normalmente negligenciados nas análises de valores obtidos por testes e ensaios de propriedades, quando se usa o mais comum dos métodos de determinação de parâmetros, o gráfico. Estes fatores são o Rank e o Parâmetro de Localização.

Devido a sua própria natureza, a função (1) requer algum método, seja este puramente numérico, ou combinado com outros, para que sejam estimados os parâmetros que compõem a distribuição de Weibull. Os mais comuns são o Gráfico de Probabilidade (com suas variações), Máxima Verossemelhança, Estimadores de Momento e Estimadores Lineares.<sup>[4]</sup> Cada um tem suas vantagens e desvantagens, obviamente. Este trabalho tratará apenas de idiosincrasias do gráfico de probabilidade. Os outros métodos serão empregados apenas como ferramenta de comparação e seus valores serão obtidos diretamente de software estatístico que acompanha a referência.<sup>[4]</sup>

## 2 DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DE WEIBULL

A função de densidade de probabilidade de Weibull é definida como:<sup>[5]</sup>

$$f(x) = \frac{\beta(x - \delta)^{\beta-1}}{\theta^\beta} e^{-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^\beta} \quad (1)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro de forma (também conhecido como Módulo de Weibull),

$\theta$  é parâmetro de escala,

$\delta$  é o parâmetro de localização.

Tipicamente  $\beta$  pode ser determinado como estando entre os valores de 0,5 e 15. Se  $\beta$  cresce, a média da distribuição se aproxima de  $\theta$  e a variância se aproxima de zero. Para um caso analisado tendo uma distribuição de Weibull de 2 parâmetros ( $\delta = 0$ ),  $\theta$  é conhecido como grandeza característica, ou seja, se o estudo for sobre vida útil,  $\theta$  é a vida característica, se o caso abordado for sobre tensão de ruptura,  $\theta$  é a tensão de ruptura característica daquela amostra. Isto significa que 63,2% das amostras irão falhar até este ponto, independente do valor de  $\beta$ .<sup>[5]</sup>

### 3 DISTRIBUIÇÃO RANK

Dada uma seqüência ordenada de dados,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  cujo número total de amostras é  $n$  e tem uma função de distribuição cumulativa  $F(x)$ , onde  $x$  é um valor contínuo, deseja-se determinar os valores dos estimadores  $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ .

A população estudada pode ser dividida em três regiões distintas. Para a que a  $j$ -ésima amostra ( $x_j$ ) ocorra na região central,  $j - 1$  observações devem ocorrer na região 1 (anterior) e  $n - j$  na região 3. As regiões são mutuamente excludentes e a probabilidade de que cada observação caia em uma região é constante. O trabalho de K.C. Kapur e L.R. Lamberson<sup>[5]</sup> apresenta com detalhes estas deduções e continua até apresentar a função Beta, que integrada fornece a solução para o problema da estimativa dos  $F(x_n)$ .

Existem a partir deste ponto dois candidatos para estimar o valor de  $F(x_n)$ : São eles o valor médio (ou Rank Médio) e o valor da mediana (ou Rank Mediano). A expressão para o valor do Rank Médio é dado por:

$$\text{Rank Médio} \rightarrow (x_j) = \frac{j}{n+1} \quad (2)$$

Onde  $j$  é a ordem da amostra e  $n$  o número total de amostras em um lote. E para o valor do Rank Mediano tem-se que:

$$\text{Rank Mediano} \rightarrow (x_j) = \frac{j-0,3}{n+0,4} \quad (3)$$

O valor médio é usado porque a média é normalmente assumida como sendo o valor representativo de toda a distribuição. Porém, em distribuições muito distorcidas, como é o caso das distribuições de Rank, a mediana descreve melhor a amostra.<sup>[4]</sup> As distribuições em rank são normalmente distorcidas da direita para a esquerda quando se inicia a análise do menor para o maior valor. Assim sendo a probabilidade de que um valor da amostra caia abaixo da média é maior para os primeiros membros ordenados (do menor para o maior) do que para os últimos (maiores valores). Isto implica em que se o Rank Médio está sendo usado, o Rank designado para as primeiras observações serão provavelmente grandes demais e os designados para as últimas serão pequenas demais, com mudanças sucessivas no valor do erro para os termos intermediários. Quando uma linha reta é usada para descrever (através de *best-fit*) estes dados estudados usando Rank Médio, a linha sofrerá rotação no sentido horário e sua inclinação será menor, indicando valores menores que os reais para os fatores estudados. Desta forma existe uma inclinação para se usar o Rank Mediano neste método.

Existem outras propostas para o Rank Mediano. White,<sup>[6]</sup> apresenta duas possíveis estimativas:

$$\text{Rank Mediano W1} \rightarrow (x_j) = \frac{j-0,375}{n+0,250} \quad (4)$$

Ou mesmo:

$$\text{Rank Mediano W2} \rightarrow (x_j) = \frac{i-0,5}{n} \quad (5)$$

Dodson apresenta também os estimadores de Kaplan-Meir:<sup>[4]</sup>

$$F(x_i) = 1 - \prod_{j=1}^i \left( \frac{n-j}{n-j+1} \right)^{Q_j} \quad (6)$$

onde  $Q_j$  é um identificador de dados censurados.  $Q_j = 0$  para observações que foram censuradas e  $Q_j = 1$  para aquelas que não. Dodson<sup>[4]</sup> descreve  $Q_j$  ao contrário deste texto, mas simulações numéricas indicam que este valor é como acima descrito. A expressão (6) pode ser escrita também da seguinte forma:

$$F(x_i) = \frac{\left( \frac{\Gamma(-n+i+1)}{\Gamma(-n+i)} \right)^{Q_j}}{\left( \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n)} \right)^{Q_j}} \quad (7)$$

onde  $\Gamma$  é a Função Gama, tabulada em textos estatísticos.

#### 4 PARÂMETRO DE LOCALIZAÇÃO DIFERENTE DE ZERO ( $\delta \neq 0$ )

Em diversas situações o limite mínimo de propriedade estudada é zero. Porém existem outros onde estes valores são diferentes de zero. Quando isto ocorre o limite mínimo é igual ao Parâmetro de Localização  $\delta$ . Se o gráfico de probabilidades apresenta uma curva apontada para baixo na sua extremidade esquerda, isto é uma indicação que o valor designado para  $\delta$  foi muito pequeno.

Se o gráfico de probabilidade apresenta curvatura para cima, isto é um indicativo de que o parâmetro de localização pode ser negativo. Isto sinaliza para falhas antes do início dos testes, através de manuseio errado, queda, ou montagem. Dodson<sup>[4]</sup> também recomenda para casos onde o Módulo de Weibull seja maior do 10, seja feita uma investigação levando-se em conta a existência do parâmetro de localização.

Quando se trabalha com distribuição de Weibull de 3 parâmetros, a presença do  $\delta$  sempre irá ocasionar um comportamento melhor da reta passando pelos pontos de dados. Isto indica que este termo só deve ser usado quando se tem evidência de que algum fator que afete a grandeza medida esteve presente antes dos testes se iniciarem. Caso contrário, tem-se valor de parâmetros superestimados.

#### 5 INTERVALOS DE CONFIANÇA

Uma vez que os parâmetros sejam estimados é preciso avaliar o quão precisas foram estas estimativas. Isto pode ser feito através da determinação da Variância do parâmetro estimado. Os intervalos de confiança calculados usando-se este método (empregando-se a Variância) assumem que a distribuição dos valores estudados tende a ser Normal. O Teorema do Limite Central prevê que quanto maior for o lote de amostras estudado, mais a distribuição destes tenda à Normal. Um lote com mais de 20 amostras tende a gerar limites de confiança quase exatos, embora possa o mesmo ocorrer em lotes menores.<sup>[4]</sup> Deste modo, lotes pequenos fornecem estimativas quase-exatas, mas tendem a solução exata se o número de amostra crescer. O procedimento para se empregar este método passo a passo é descrito em algumas publicações.<sup>[7,8]</sup>

Os dois métodos para determinação do intervalo de confiança de  $\beta$  mais comumente usados são: para construção de intervalos aproximados, usa-se Estimadores de Máxima Verossemelhança (EMV) e para intervalos exatos, o método dos Estimadores Lineares (EL). A limitação associada com o segundo método é que somente deve ser usado com amostras completas ou que tenham sofrido apenas um valor censurado. Este trabalho empregou o EMV como seu estimador com o qual os outros resultados foram comparados.

Para o intervalo associado com  $\delta$ , Dodson<sup>[4]</sup> recomenda tornar zero o valor de  $\delta$  caso o valor nulo se encontre no intervalo de confiança determinado. Este estudo adotará esta prática.

## **6 TENSÃO DE RUPTURA EM UMA CERÂMICA VERMELHA**

### **6.1 Preparação das Amostras**

A cerâmica vermelha, estudada neste trabalho, pertence ao grupo das cerâmicas tradicionais e é proveniente da região conhecida como Baixada Campista, Campos dos Goytacazes-RJ. A argila foi coletada de um barreiro empregado para fabricação de tijolos, pertencente a uma indústria cerâmica local na forma de torrões através de sondagem à pá e picareta numa jazida situada na localidade de Poço Gordo, sub-distrito de Campos dos Goytacazes/RJ e em seguida armazenada em sacos plásticos devidamente identificados. O material extraído da jazida passou por um processo de beneficiamento antes de sua utilização. Inicialmente a amostra coletada foi secada ao ar livre até os torrões poderem ser desagregados por cominuição em triturador. Num momento seguinte, a argila foi peneirada e destorroada repetidas vezes seqüencialmente até que foi alcançado um aproveitamento de aproximadamente 90% da quantidade original. Neste processo utilizou-se peneira # 60 (0,25 mm). Após o peneiramento, a argila foi secada em estufa a 110 °C durante 24 horas e em seguida foi acrescentado 7% de água em peso. A massa foi homogeneizada e separada nos respectivos pesos para confecção dos corpos de prova. A elaboração de corpos de prova por prensagem uniaxial foi feita utilizando-se uma prensa manual tipo hidráulica. Foram utilizados uma matriz de aço com cavidade retangular de (114 x 253) mm e um conjunto de pistões de aço. A pressão de compactação utilizada foi de cerca de 31 MPa, a qual permaneceu como constante neste estudo. Antes da prensagem, a argila foi espalhada de forma a haver uma distribuição homogênea do material, para que após a moldagem existissem poucas diferenças nas medidas das dimensões dos corpos de prova. A etapa de queima dos corpos de prova fabricados foi realizada em um forno elétrico marca BRASIMET. O ciclo ao qual os corpos de prova foram submetidos para queima a 950 °C, consiste em se elevar da temperatura ambiente até 110 °C, com as amostras mantidas nesta temperatura por um período de 2 horas para ocorrer evaporação da água. Seguindo de aumento de 50 °C a cada 15 minutos até o limite de 600° C, aumento de 100 °C a cada 15 minutos até o limite de 900 °C, aumento até 950 °C em 15 minutos, sendo mantidos nessa temperatura máxima por um período de 3 horas. Após isto o resfriamento foi feito apenas desligando-se o forno. A tensão de ruptura foi calculada como descrito por Elgueta.<sup>[9]</sup>

## 7 RESULTADOS

### 7.1 Tensões de Ruptura

Para o lote de corpos de prova estudado, tem-se a Tabela 1, abaixo:

**Tabela 1** – Lote 1, contendo 72 amostras e suas respectivas tensões de ruptura. O valor do teste 21 foi retirado devido a constatação de que estava danificado antes do teste.

amostra	Sut (MPa)	amostra	Sut (MPa)	amostra	Sut (MPa)	amostra	Sut (MPa)
1	6,84	19	7,16	37	9,46	55	10,70
2	10,20	20	6,72	38	10,34	56	11,45
3	8,69	21	xxx	39	7,10	57	11,62
4	11,34	22	7,09	40	12,47	58	14,57
5	10,51	23	7,28	41	7,96	59	11,24
6	9,18	24	5,86	42	13,70	60	13,25
7	9,90	25	6,35	43	15,84	61	10,62
8	11,72	26	7,58	44	14,38	62	9,88
9	13,51	27	8,48	45	14,05	63	6,47
10	16,71	28	8,01	46	11,09	64	10,28
11	6,84	28	9,35	47	10,80	65	9,51
12	16,82	30	8,10	48	6,83	66	8,38
13	15,71	31	9,48	49	8,39	67	9,95
14	16,85	32	9,54	50	7,95	68	9,02
15	12,98	33	12,46	51	7,39	69	9,42
16	11,16	34	11,11	52	10,03	70	8,79
17	10,61	35	11,77	53	10,76	71	6,94
18	7,95	36	11,67	54	9,20	72	6,52

A partir destes valores acima listados, foram gerados outros sub-lotes contendo 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50 e 60 amostras. O método consistiu em se listar os valores na ordem em que foram obtidos, depois, de baixo para cima, ir progressivamente eliminando as quantidades necessárias para que os novos lotes fossem gerados. Então estes lotes foram analisados como se fossem novos lotes, independentes entre si.

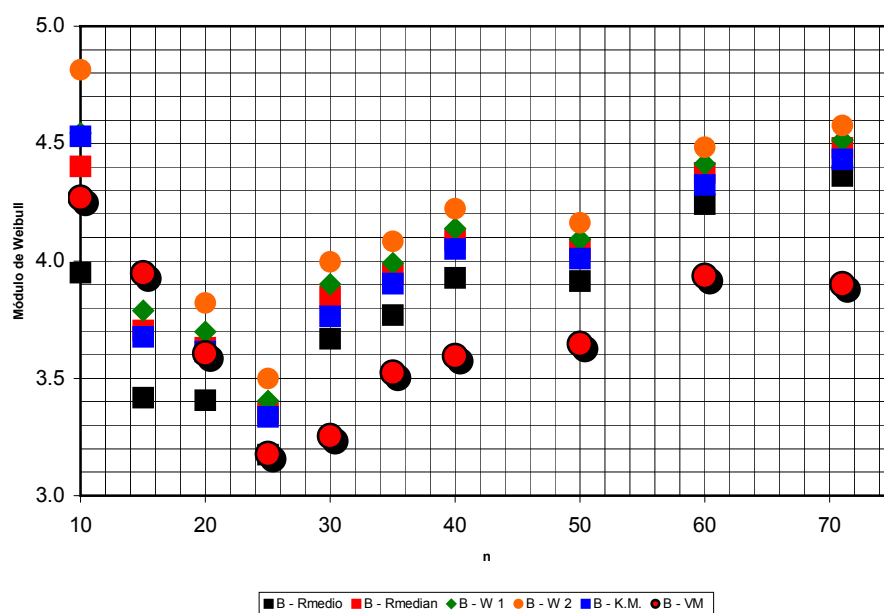
### 7.2 Influência do Rank no Valor do Fator de Forma ( $\beta$ )

A Tabela 2 apresenta os valores de  $\beta$ , obtidos empregando-se o método gráfico de probabilidade e cada um dos modelos de Rank apresentados no item 3 deste trabalho. Estes então são comparados aos resultados obtidos pelo EMV, que é considerado o método mais preciso na determinação dos parâmetros de Weibull.<sup>[4]</sup>

**Tabela 2** – Valores de  $\beta$  obtidos pelo Método Gráfico, empregando-se as diversas expressões para o Rank. Na última coluna valores estimados pelo EMV.

n	Parâmetro de Forma (Módulo de Weibull)					
	Médio (2)	Mediano (3)	White 1 (4)	White 2 (5)	Kaplan-Meir (7)	EMV (8)
10	3,95	4,40	4,54	4,82	4,53	4,27
15	3,42	3,70	3,79	3,95	3,68	3,95
20	3,41	3,63	3,70	3,82	3,61	3,61
25	3,17	3,35	3,40	3,50	3,34	3,18
30	3,67	3,85	3,90	4,00	3,76	3,25
35	3,77	3,94	3,99	4,08	3,90	3,52
40	3,93	4,09	4,14	4,22	4,05	3,60
50	3,91	4,05	4,09	4,16	4,01	3,65
60	4,24	4,38	4,41	4,48	4,32	3,94
71	4,36	4,48	4,52	4,58	4,43	3,90

A Figura 1 apresenta a representação gráfica desta tabela. Os pontos pretos foram obtidos empregando-se Rank Médio, quadrados azuis com Kaplan-Meir, quadrados vermelhos com Rank Mediano, losangos verdes com White 1, os círculos laranjas, determinados com Rank de White 2 e por fim os círculos vermelhos com sombra preta EMV.



**Figura 1** – Valores de  $\beta$  obtidos para os diversos modelos de Rank e também pelo EMV.

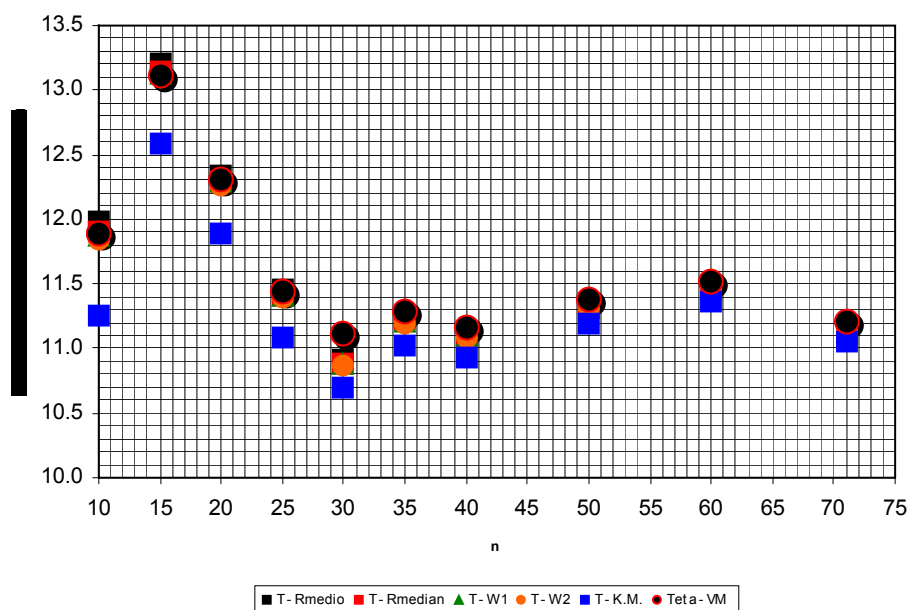
### 7.3 Influência do Rank Mediano no Valor do Fator de Escala ( $\theta$ )

A Tabela 3 apresenta os valores de  $\theta$ , obtidos empregando-se o método Gráfico de probabilidade e cada um dos modelos de Rank apresentados no item 3 deste trabalho. Estes então são comparados aos resultados obtidos pelo EMV

**Tabela 3** – Valores de  $\theta$  obtidos pelo Método Gráfico, empregando-se as diversas expressões para o Rank. Na última coluna valores estimados pelo EMV.

n	Parâmetro de Escala (Grandeza Característica)					
	Médio (2)	Mediano (3)	White 1 (4)	White 2 (5)	Kaplan-Meir (7)	EMV (15)
10	11,98	11,90	11,88	11,85	11,26	11,89
15	13,21	13,14	13,13	13,10	12,59	13,12
20	12,34	12,30	12,28	12,27	11,89	12,30
25	11,45	11,41	11,40	11,39	11,08	11,44
30	10,91	10,89	10,88	10,87	10,70	11,12
35	11,24	11,22	11,21	11,20	11,02	11,28
40	11,12	11,10	11,09	11,08	10,93	11,26
50	11,34	11,32	11,32	11,31	11,19	11,38
60	11,48	11,46	11,46	11,45	11,36	11,52
71	11,16	11,14	11,14	11,13	11,06	11,21

Na Figura 2, os quadrados pretos foram obtidos empregando-se o Rank Médio, quadrados azuis com Kaplan-Meir, quadrados vermelhos com Rank Mediano, triângulos verdes com White 1, círculos laranjas Rank de White 2 e por fim os círculos vermelhos com sombra preta EMV.



**Figura 2** - Valores de  $\theta$  obtidos para os diversos modelos de Rank e também pelo EMV.

#### 7.4 Influência da Existência do Fator de Localização no Valor do Fator de Forma ( $\beta$ )

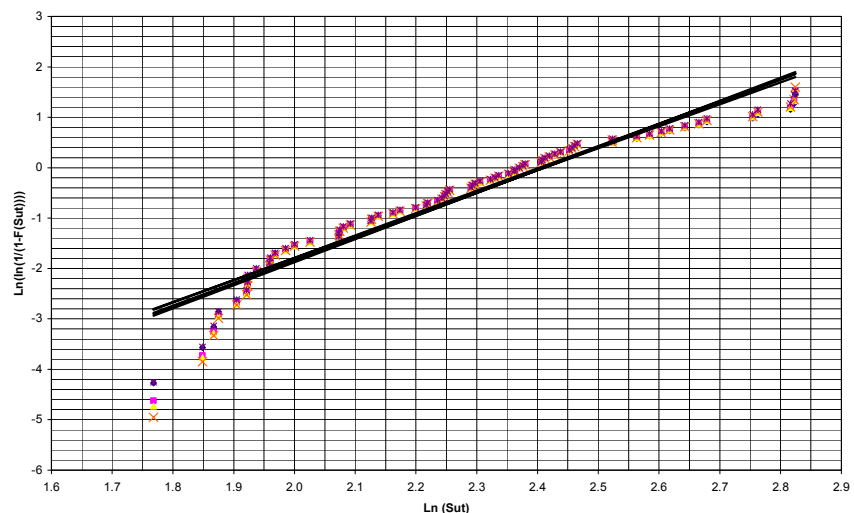
Da mesma forma que a influência dos diversos modelos matemáticos para descrever o Rank de uma dada amostra foram empregados para se avaliar seu impacto sobre o valor final das propriedades medidas, o mesmo foi feito para o Parâmetro de Localização. Os resultados são compilados na Tabela 4. Foram feitas simulações com a expressão (1) completa e reduzida a dois termos e como termo de comparação VCM também foi feito. A razão pela qual se pode admitir a existência deste termo é o fato do forno onde os corpos de prova foram queimados ser de pequenas dimensões em relação ao tamanho do lote, o que pode ter ocasionado a



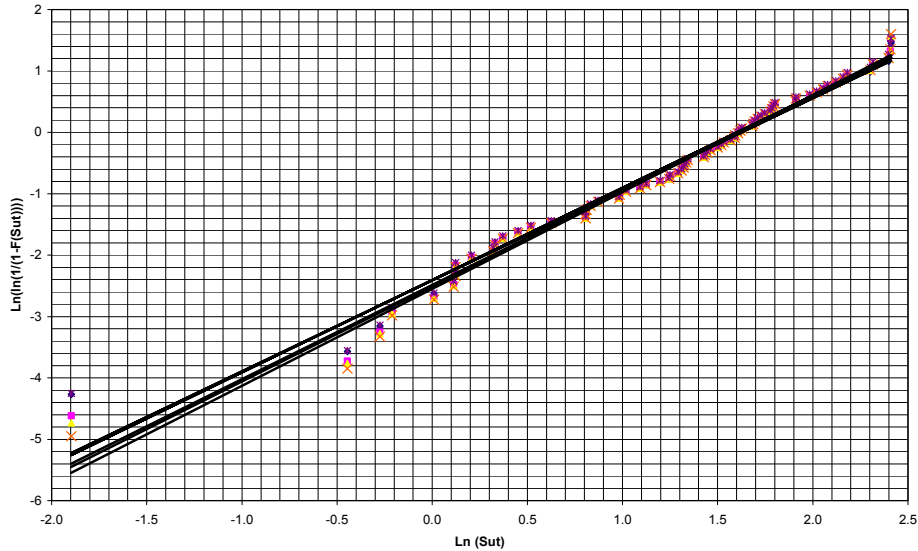
existência de gradientes de temperatura ao longo das dimensões do mesmo. A possível presença de tensões residuais devido a queima indica a necessidade de se tratar estes dados com a formulação de Weibull onde  $\delta$  existe e representa esta tensão que já existe no corpo de prova antes mesmo de qualquer esforço externo ser aplicado. A validade disto deve ser discutida ao final. As Figuras 3 e 4 apresentam os gráficos onde  $\delta = 0$  e  $\delta \neq 0$ , respectivamente.

**Tabela 4** – Valores dos Parâmetros de Weibull obtidos pela EMV, Gráfico de Probabilidades e por fim comparados aos valores obtidos quando impôs-se  $\delta = 0$ .

n	$\beta_{EMV\ 3T}$	$\theta_{EMV\ 3T}$	$\delta_{EMV\ 3T}$	$\beta_{graf\ 3T}$	$\theta_{graf\ 3T}$	$\delta_{graf\ 3T}$	$\beta_{2T}$	$\theta_{2T}$
10	1,82	5,18	6,24	5,18	10,33	0,68	4,268	11,89
15	0,89	4,87	6,83	2,79	11,20	1,85	3,948	13,12
20	0,94	4,27	6,71	1,31	5,77	5,98	3,606	12,30
25	1,18	4,64	5,81	1,19	5,03	5,63	3,177	11,44
30	1,27	4,48	5,80	1,36	4,84	5,57	3,254	11,12
35	1,45	4,87	5,73	1,49	5,21	5,51	3,523	11,28
40	1,49	4,80	5,73	1,55	5,11	5,51	3,596	11,16
50	1,52	5,02	5,73	1,54	5,26	5,57	3,646	11,38
60	1,75	5,40	5,63	1,75	5,65	5,45	3,936	11,52
71	1,67	4,99	5,71	1,68	5,17	5,57	3,901	11,21



**Figura 3** – Gráfico de Probabilidade do lote completo. As retas foram obtidas pelos diversos valores de Rank apresentados. Assumindo-se que  $\delta = 0$ .



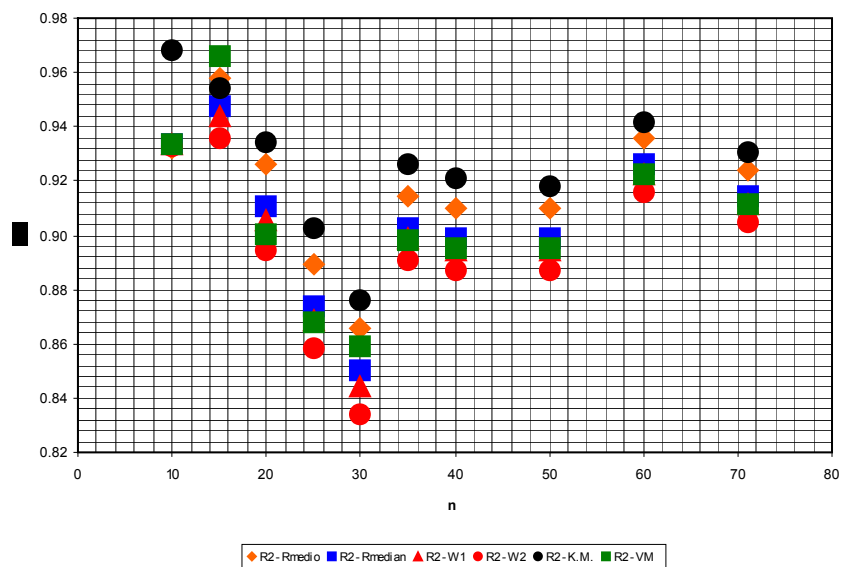
**Figura 4** - Gráfico de Probabilidade do lote completo. As retas foram obtidas pelos diversos valores de Rank apresentados. Assumindo-se que  $\delta \neq 0$ .

A Tabela 5 apresenta os limites dos parâmetros de Weibull para uma confiabilidade de 95%. Nota-se que em alguns casos não foi possível determinar estes limites ( $\delta$ , lotes com 15 e 20 amostras). O método empregado para se determinar estes limites está indicado no índice do parâmetro estimado.

**Tabela 5** – Limites de  $\delta$ , determinados pela EMV.

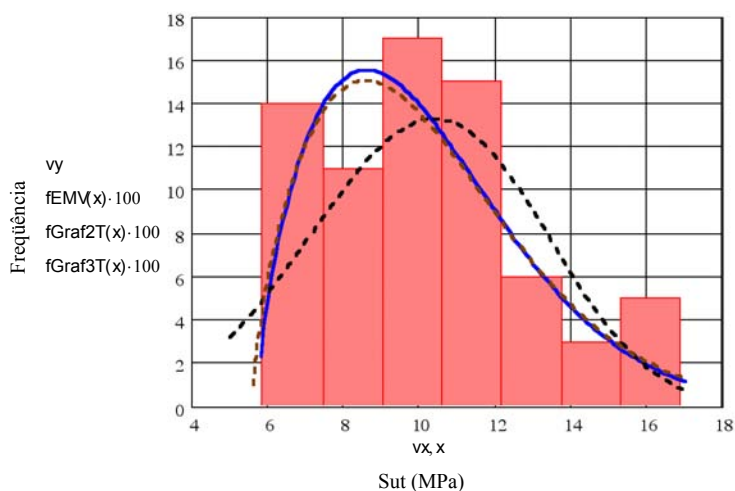
n	$\beta_{EMV\ 3T}$		$\beta_{EMV\ 2T}$		$\theta_{EMV\ 3T}$		$\theta_{EMV\ 3T}$		$\delta_{EMV\ 3T}$	
	$\beta_{LI}$	$\beta_{LS}$	$\beta_{LI}$	$\beta_{LS}$	3,84	6,99	10,45	13,54	$\delta_{LI}$	$\delta_{LS}$
10	1,21	2,73	2,93	6,22	2,99	7,93	11,70	14,70	5,30	6,84
15	0,60	1,31	2,82	5,52	3,46	6,23	11,04	13,70		
20	0,68	1,25	2,72	4,78	3,46	6,23	10,24	12,76		
25	0,90	1,54	2,48	4,07	3,50	5,75	10,08	12,26	5,63	5,86
30	1,00	1,61	2,61	4,06	3,98	5,96	10,37	12,27	5,60	5,86
35	1,16	1,81	2,87	4,32	3,99	5,76	10,34	12,05	5,44	5,86
40	1,21	1,83	2,97	4,35	4,27	5,90	10,64	12,18	5,46	5,86
50	1,26	1,83	3,06	4,34	4,75	6,14	10,88	12,20	5,47	5,86
60	1,47	2,07	3,36	4,61	4,41	5,64	10,63	11,82	5,28	5,86
71	1,43	1,97	3,38	4,50	3,84	6,99	10,45	13,54	5,45	5,86

Uma das maneiras de se avaliar o quão bem ajustada está uma reta aos pontos que a deram origem é se analisar o fator  $R^2$  das mesmas, após o *curve-fitting*. A Figura 5 apresenta os valores obtidos ao longo deste estudo. Quanto mais próximo de 1 for o valor de  $R^2$ , mais adequadamente a reta representa os pontos que lhe deram origem.



**Figura 5** – Valores de  $R^2$  para os lotes analisados. Círculos pretos representam Kaplan–Meir, quadrados verdes EMV, losangos laranja Rank Médio, quadrados azuis Rank Mediano, triângulos vermelhos Rank White 1 e por círculos vermelhos, Rank White 2.

Outra ferramenta para que possa definir se  $\delta$  será diferente de zero ou não consiste em se analisar a qualidade do ajuste das curvas determinadas pelos coeficientes listados neste trabalho ao histograma do lote de amostras. A Figura 6 apresenta a representação gráfica dos valores obtidos para lote inteiro (71 amostras válidas). As barras representam cada uma das sete faixas do histograma do lote. O traço azul representa a distribuição obtida pelos Estimadores de Máxima Verossemelhança, o tracejado preto representa os valores do método Gráfico de Probabilidades com apenas 2 termos ( $\delta = 0$ ). O tracejado marrom indica os valores obtidos pelo método Gráfico de Probabilidades com 3 termos. A escolha do número de faixas foi feita pelo critério de usar inicialmente  $n/10$  faixas no histograma. A variação deste valor implicou em alguma variação na concordância das curvas com as barras, mas nenhuma alterou a chamada *skewness* do gráfico (sua inclinação para a esquerda em relação à média se manteve).



**Figura 6** – Histograma do lote completo (71 amostras) e as curvas geradas pelos fatores determinados pelos diferentes métodos empregados neste trabalho.

## 8 CONCLUSÕES

### 8.1 Escolha de Formulação do Rank

8.1.1 - Para os casos onde  $\delta = 0$  se aplica, pode-se notar que pelo critério do  $R^2$ , a melhor formulação para descrever um lote de amostras em uma solução gráfica são os Estimadores de Kaplan-Meir, que obtiveram sempre o maior valor, independente do tamanho do lote. Embora estas diferenças tenham sido relativamente pequenas no lote e sub-lotes analisados, não existe garantia que o mesmo ocorrerá sempre, portanto, uma análise inicial do fenômeno estudado se faz necessária.

8.1.2 – A aproximação proposta por White e aqui chamada de “White 2”, foi a que apresentou pior  $R^2$ .

8.1.3 – A escolha da formulação do Rank implicará em variação nos valores dos parâmetros estimados.

8.1.4 – As diversas formulações de Rank mantiveram as posições relativas entre si para todos os lotes, sendo Rank de White 1 a que estimou os maiores valores de  $\beta$  e Médio, os menores. Para  $\theta$ , as maiores estimativas foram de Rank Médio e as menores de Kaplan-Meir.

8.1.5 – Para o lote completo e  $\delta = 0$  a diferença percentual entre o maior e o menor valor estimado de  $\beta$  foi de 14.8%. Para  $\theta$ , foi de 1.3%.

8.1.6 – Pelo acima citado, para lotes apresentando propriedades muito dispersivas, caso a estimativa de parâmetros seja feita pelo método do Gráfico de Probabilidade, recomenda-se empregar os Estimadores de Kaplan-Meir como expressão do Rank.

### 8.2 Existência do Parâmetro de Localização

8.2.1 – Existiu um efeito físico (tratamento térmico) que justificou uma possível existência do Parâmetro de Localização.

8.2.2 – A hipótese de que  $\delta \neq 0$  alterou profundamente os valores dos outros dois parâmetros da distribuição de Weibull. Isto requereu que outras características do lote fossem também observadas, para que se chegasse a decisão de descartar ou não esta hipótese.

8.2.3 – A cauda esquerda descendente dos pontos apresentados (Figura 3) indica que o valor de  $\delta$  foi sub-avaliado (deveria ser maior do que zero, que foi a hipótese inicial).

8.2.4 – A Tabela 5 não apresenta nenhum intervalo de confiabilidade que inclua o valor nulo.

8.2.5 – O histograma do lote completo (Figura 6) comparado com as curvas traçadas a partir dos parâmetros listados na Tabela 4 indica que as curvas geradas pela formulação com três parâmetros descrevem melhor o histograma.

8.2.6 – Pelas razões acima listadas conclui-se que o Parâmetro de Localização existe e tem seu valor real situado entre os limites de 5,45 e 5,86, com tendência para 5,71 e confiabilidade de 95%.

### 8.3 Tamanho Mínimo de Lote

8.3.1 – A partir de um número entre 30 e 35 amostras, o valor de  $\beta$  já varia dentro dos limites de confiabilidade 95% do lote completo (Tabela 5).

8.3.2 – Para amostras com número de elementos entre 20 e 25, o valor de  $\theta$  situa-se entre os limites de confiabilidade.

8.3.3 – Dada a grande dispersão encontrada na grandeza estudada, é necessário que sejam empregados lotes grandes para correta caracterização da mesma.

## Agradecimentos

O autor agradece a Petrobrás UN-BC, a FAPERJ e a TECNORTE/FENORTE, pelo suporte financeiro continuado.

## REFERÊNCIAS

- 1 DANZER, R., SUPANIC, P., PASCUAL, T., LUBE T. Fracture Statistics of Ceramics – Weibull Statistics and Deviations From Weibull Statistics. **Engineering Fracture Mechanics**, article in press, 2006.
- 2 SOLIMAN, A.A., ELAH, A.H.A., SULTAN, K.S., Comparison of Estimates Using Record Statistics From Weibull Model: Bayesian and Non-Bayesian Approaches. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 51, n. 3, 2065 – 2077, 2006.
- 3 WU, D., ZHOU, J. Unbiased Estimation of Weibull Parameters with Linear Regression Method. **Journal of the European Ceramic Society**, v. 26, n. 7, 1099-1105, 2006.
- 4 DODSON, B. **The Weibull Analysis Handbook**, 2nd ed., ASQ Quality Press, 2006.
- 5 Kapur, K.C., Lamberson, L.R. **Reliability in Engineering Design**, John Wiley & Sons, 1977.
- 6 ASKELAND, D.R., PHULÉ, P.P. **The Science and Engineering of Materials**, 5<sup>th</sup> ed., Thomson Engineering, 2005.
- 7 D.N. PRABHAKAR, D.N., XIE, M., JIANG, R. **Weibull Models** (Wiley Series in Probability and Statistics), Wiley Interscience, 2003.
- 8 ABERNETHY, R. **The New Weibull Handbook: 5<sup>th</sup> Edition**, Reliability and Statistical Analysis for Predicting Life, Safety, Supportability, Risk, Cost and Warrant Claims, Robert Abernethy Editor, 2006.
- 9 ELGUETA, M., Numerical Correction of Weibull Function's Nomogram for Three Point-Bending Test. **Engineering Fracture Mechanics**, v70, 1467-1470, 2003.