

INFLUÊNCIA DAS CARACTERÍSTICAS DOS NÓDULOS NO COMPORTAMENTO DE TRINCAS EM MATRIZ DE FERRO FUNDIDO*

Guilherme Suginoshita¹
Marco Antonio Luersen²
Carlos Henrique da Silva³

Resumo

As propriedades mecânicas e custo-benefício dos ADIs (ferros fundidos nodulares austemperados) tem motivado diversas pesquisas acadêmicas com o intuito de compreender a influência da sua microestrutura em suas propriedades. Buscando consolidar os resultados de estudos anteriores, no presente trabalho foram analisados os efeitos das características (tamanho e posição) dos nódulos de grafita na propagação de trinca submetida a um dado carregamento, utilizando o método dos elementos finitos (MEF) associado à técnica de *re-meshing* para propagação de trinca, com incremento de comprimento de trinca fixo, tendo como base de estudo dois tipos distintos de ADI. Dentre as principais conclusões, foi observado que nódulos de maior diâmetro apresentam maior influência sobre os fatores intensidade de tensão, sendo este fator um possível motivo para a melhor resistência em fadiga do material ADI 2 (menor tamanho de nódulo) em relação ao ADI1, conforme observado em estudos experimentais anteriores.

Palavras-chave: Ferro fundido nodular austemperado; Propagação de trinca; Método dos elementos finitos.

INFLUENCE OF THE NODULES' CHARACTERISTICS IN CRACK BEHAVIOR IN CAST IRON MATRIX

Abstract

The mechanical properties and the cost-benefit of ADIs (austempered ductile irons) have motivated several academic researches in order to understand the influences of the microstructure on the material properties. In order to consolidate the results of previous studies, the present study analyzes the influences of size and arrangement of graphite nodules in the propagation of a crack subjected to a given load case, using the finite element method associated with the re-meshing technique for crack propagation, based on two different ADIs. Among the main conclusions, it was observed that nodules with larger diameter have greater influence on the stress intensity factors, a possible reason for the better fatigue resistance of ADI 2 (lower nodule size) compared to ADI 1, as observed in previous experimental studies.

Keywords: Austempered ductile iron; Crack propagation; Finite element analysis.

¹ Graduando em Eng. Mecânica, Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

² Dr. Engenharia Mecânica, Professor do Departamento Acadêmico de Mecânica, Laboratório de Mecânica Estrutural (LAMES-CITEC), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

³ Dr. Engenharia Mecânica, Professor do Departamento Acadêmico de Mecânica, Laboratório de Superfícies e Contato (LASC), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

1 INTRODUÇÃO

O ferro fundido nodular austemperado (*Austempered Ductile Iron* - ADI) pertence a uma classe de ferros fundidos com grafita em forma de nódulos e matriz ausferrítica. O tratamento térmico de austêmpera proporciona à matriz alta resistência mecânica e ao mesmo tempo ductilidade. A elevada resistência ao desgaste e à fadiga contribui para a competitividade dos ADI, tornando crescente a aplicação destes materiais na fabricação de componentes mecânicos, como engrenagens, molas e componentes de suspensão automotiva [1]. Ainda, esta classe de ferro fundido apresenta boa usinabilidade quando comparada a aços de durezas equivalentes, e exigem temperaturas de tratamento térmico mais baixas, contribuindo para a redução de custos de fabricação [2].

Pelo controle do tamanho e dispersão dos nódulos de grafita na matriz é possível modificar as propriedades mecânicas do ADI e, como consequência, o seu desempenho quanto à fadiga de contato, como pode ser observado na curva de Weibull da Figura 1. Gans, *et al.* [3] mostraram que os ferros fundidos denominados por ADI 1 e ADI 2, com diferentes tamanhos e distribuições de nódulos, apresentam diferentes resistências ao desgaste por *pitting* em ensaio tipo FZG, e ainda resistência comparável a do aço AISI 4140, no caso do ADI 2. Além das características diferentes dos nódulos, as condições de tratamento térmico foram diferentes, conduzindo a uma matriz com menor dureza e mais dúctil.

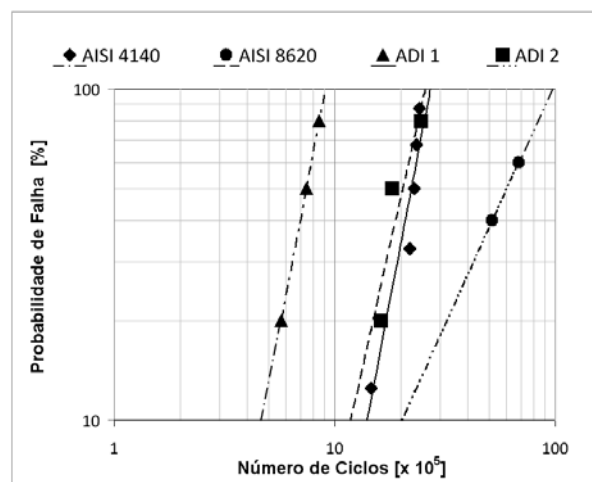


Figura 1. Taxa de dano sofrida para diferentes materiais na mesma condição de trabalho [3].

Os nódulos presentes em ADIs apresentam baixa resistência mecânica e rigidez quando comparados à matriz, assumindo o papel de descontinuidades [4]. Desta forma, os nódulos atuam como concentradores de tensão, sendo assim mais suscetíveis à nucleação de trincas, tendo influência direta na resistência a fadiga destes materiais. Além disso, as características geométricas dos nódulos (tamanho e distribuição) alteram o campo de tensões na matriz, modificando as condições sob as quais as trincas se propagam no material [5]. Sendo as propriedades do ADI influenciadas pelo tamanho e distribuição dos nódulos de grafita, compreender como estes fatores podem interferir na nucleação e propagação de trincas de fadiga torna-se essencial para o desenvolvimento dos ADIs.

Dommarco *et al.* [6] buscaram compreender a influência da relação entre área real de contato e a área projetada de nódulos no desempenho quanto à fadiga de contato. Gans *et al.* [7] identificaram que tanto o tamanho quanto a distância entre

nódulos alteravam a intensidade e a profundidade das tensões cisalhantes máximas na região próxima ao contato de dentes de engrenagens. Lazzaron [8] observou que o fator de concentração de tensão na região dos nódulos de grafita próximos à região de contato de dentes de engrenagens depende tanto do tamanho quanto da distância entre nódulos, podendo até ocorrer efeito de alívio de tensões devido à interferência de um nódulo sobre o campo de tensões de um nódulo vizinho.

Buscando analisar o desgaste relacionado a esforços de contato, Komvopoulos e Cho (1997) utilizaram o MEF para analisar o comportamento dos fatores de intensidade de tensão (SIFs) em uma trinca subsuperficial, conforme uma aspereza se desloca na superfície [5]. Tendo como contexto o desgaste do tipo *pitting* em dentes de engrenagens, Fajdiga *et al* (2002) executaram a modelagem em elementos finitos de uma trinca aberta à superfície em, e pelo método de *re-meshing* simularam a propagação da trinca devido ao contato cíclico entre os dentes do par de engrenagens [9]. Jurenka e Španiel (2012) realizaram um estudo semelhante, comparando os resultados numéricos com dados experimentais retirados de ensaio tipo FZG, realizando também uma estimativa da taxa de propagação de trinca através da Lei de Paris [10]. Talemi (2013) verificou a eficiência de diversos métodos numéricos, incluindo a técnica de *re-meshing* pelo MEF no software ABAQUS, na análise de desgaste por fadiga do tipo *fretting* [11].

Buscando consolidar as informações obtidas nos estudos supracitados, no presente trabalho foram analisados os efeitos do tamanho e da disposição dos nódulos de grafita na propagação de trinca submetida a um carregamento específico. Para tal, utilizou-se o MEF, associado à técnica de *re-meshing* para propagação de trinca e estimativa dos fatores de intensidade de tensão, almejando a melhor compreensão da influência dos nódulos sobre a vida em fadiga. Desta forma, foi observada a modificação dos SIFs dos modos I e II de propagação de uma trinca, ao alterar o tamanho de um nódulo de grafita e sua posição em relação à frente de trinca.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho tem por objetivo a análise da influência do diâmetro e posição de um nódulo na propagação de uma trinca já existente na matriz, tendo como base os materiais ADI 1 e ADI 2. Para tal, será utilizada uma solução numérica por meio de elementos finitos, com auxílio do software ABAQUS.

Inicialmente, estabeleceu-se um modelo padrão para toda a análise, bidimensional, com dimensões e tamanho inicial de trinca fixos ($w = 6\text{mm}$, $h = 4\text{mm}$, $a_0 = 2\text{mm}$), modificando o diâmetro do nódulo (d), distância da ponta da trinca (L) e ângulo em relação ao plano da trinca (α). As dimensões principais e condições de contorno empregadas seguem representadas na Figura 2.

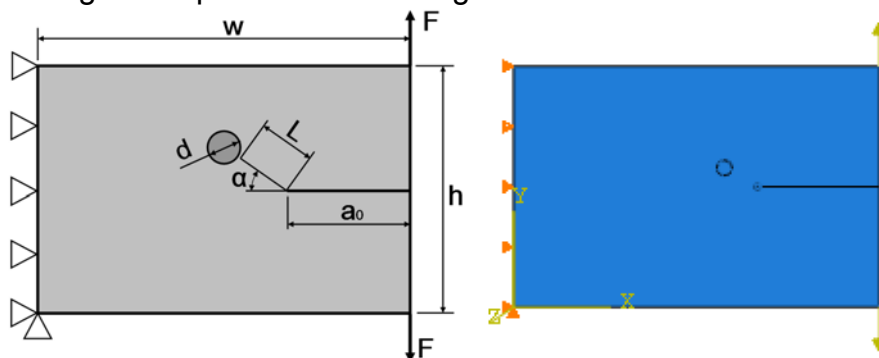


Figura 2. Representação das dimensões principais do modelo utilizado neste estudo, e visualização no software ABAQUS

As dimensões deste espécime foram determinadas com base nos tamanhos e distâncias entre nódulos dos ADIs. A Tabela 1 apresenta as características dos nódulos dos dois materiais analisados.

Tabela 1. Características dos nódulos de grafita [1]

Características	Unidade	ADI 1	ADI 2
Nodularidade	(%)	99	98
Área de Grafita	(%)	13	13
Densidade de nódulos	(nódulos/mm ²)	196	532
Diâmetro nodular médio	(μm)	29,1	17,6
Distância média entre nódulos	(μm)	80 \pm 20	36 \pm 10

Observa-se elevada nodularidade da grafita em ambos os materiais, portanto a geometria dos nódulos será simplificada para a forma esférica. As propriedades elásticas relevantes da matriz e dos nódulos, determinadas por Yan [12], encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2. Propriedades elásticas dos materiais [12]

Material	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson
Nódulo de grafita	35	0,126
Matriz de ferro fundido	210	0,290

A modelagem da propagação da trinca foi feita de forma iterativa. Inicialmente obtêm-se os fatores de intensidade de tensão e direção de propagação através de um modelo de elementos finitos elaborado no *software* ABAQUS. Em posse dos resultados desta análise numérica, modela-se um incremento no tamanho da trinca. Em seguida, refaz-se a malha de elementos finitos (*re-meshing*), passando-se à próxima iteração. O fluxograma da Figura 4 mostra a metodologia empregada em cada caso de estudo.

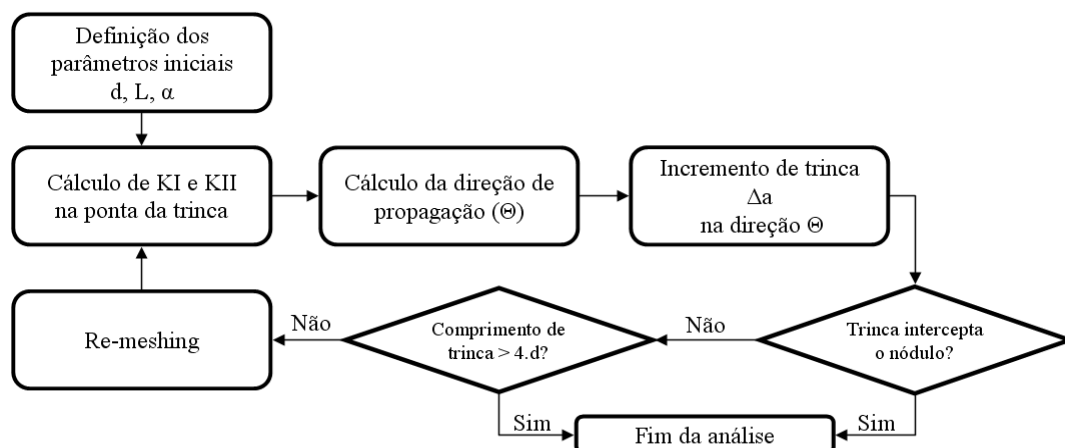


Figura 3. Fluxograma da metodologia utilizada para modelar a propagação de trinca

Nos modelos numéricos, com exceção da região em torno da trinca, foram utilizados elementos quadriláteros quadráticos, e estado plano de deformações. Na ponta de trinca foram utilizados elementos triangulares singulares do tipo *quarter-points*, de singularidade $1/\sqrt{r}$, a fim de tornar mais precisos os cálculos dos campos de tensões e deformações dos fatores de intensidade de tensão (K_I e K_{II}) [13]. A geometria dos elementos ao redor da trinca forma anéis circulares concêntricos (Figura 4).

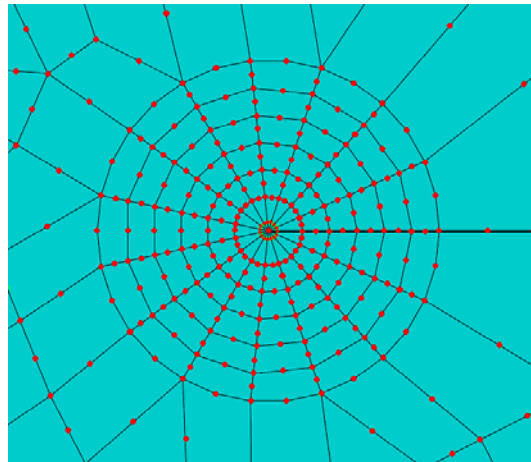


Figura 4. Representação da malha ao redor da ponta de trinca do modelo

Após cada iteração de propagação, são extraídos os resultados para os fatores intensidade de tensão para o modo I e II de propagação de trinca e a direção de propagação (baseada no critério de máxima tensão tangencial [11]). Cada iteração é modelada como uma trinca estacionária, e a propagação é realizada manualmente, executando o remodelamento da trinca e a geração de nova malha

A análise final de resultados é feita através da verificação da variação do fator de intensidade de tensão, pois quanto maior este fator mais suscetível o material será à propagação da trinca.

Antes de ser aplicada nas situações deste trabalho, esta metodologia foi utilizada em um espécime compacto (Figura 5) com dimensões próximas às utilizadas neste estudo. Então, os resultados de K_I obtidos numericamente (ABAQUS) foram comparados com a solução analítica (Equação 1) apresentada na literatura por Anderson [14].

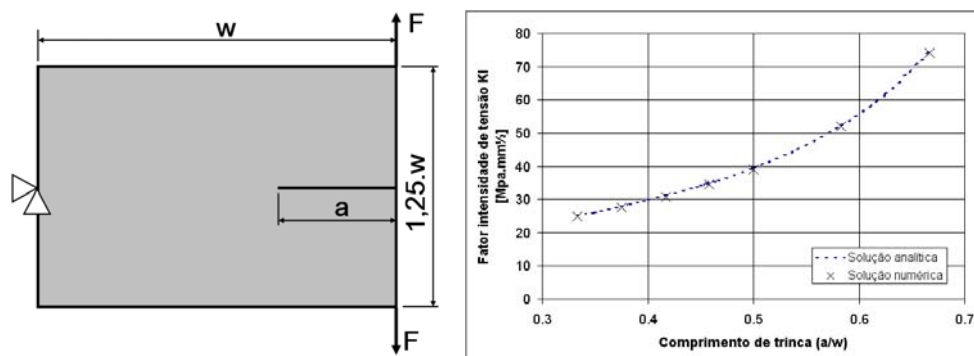


Figura 5. Representação das dimensões principais e condições de contorno e carregamento do espécime compacto, e comparação da solução analítica com resultados obtidos via MEF

$$K_I = \frac{F}{\sqrt{w}} \cdot \frac{2 + \frac{a}{w}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{3/2}} \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{w}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 - 5.60 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \quad (1)$$

Na Tabela 3 observa-se que a discrepância dos valores de K_I determinados numericamente foram inferiores a 1,06% em relação ao modelo analítico, portanto é possível concluir que a metodologia utilizada fornece resultados satisfatórios para o presente estudo. K_{II} e direção de propagação apresentaram valores desprezíveis, conforme esperado.

Tabela 3. Valores de K_I obtidos via MEF e os propostos por ANDERSON [4]

Comprimento de trinca (a)	Solução Analítica	Solução numérica	Erro
2,00	25,00	24,93	-0.29%
2,25	27,83	27,64	-0.70%
2,50	31,07	30,78	-0.93%
2,75	34,86	34,49	-1.06%
3,00	39,43	39,03	-1,02%
3,50	52,29	51,98	-0,60%
4,00	74,37	74,26	-0,14%

Parâmetros: $w = 6\text{mm}$, $F = 10\text{N}$, $a = 2\text{mm}$.

Para verificar a influência da presença do nódulo, as situações abordadas abrangem variações na distância entre o nódulo e a ponta da trinca (L) e variação na posição angular do nódulo em relação à ponta da trinca (sufixo “1” para $\alpha=0^\circ$ e “2” para $\alpha=30^\circ$), para nódulos de dois diâmetros diferentes (sufixo “A” para ADI 2 e “B” para ADI 1). A cada iteração, utilizou-se um incremento ao comprimento de trinca fixo, definido por $\Delta a = d/5$. A Tabela 4 mostra a nomenclatura dos casos de estudo.

Tabela 4. Denominação utilizada para cada situação de estudo

	$\alpha = 0^\circ$		$\alpha = 30^\circ$	
	ADI 2 ($d_A = 0,25\text{mm}$)	ADI 1 ($d_B = 0,5\text{mm}$)	ADI 2 ($d_A = 0,25\text{mm}$)	ADI 1 ($d_B = 0,5\text{mm}$)
$L_1 = 1.d$	Caso11A	Caso11B	Caso12A	Caso12B
$L_2 = 2.d$	Caso21A	Caso21B	Caso22A	Caso22B
$L_3 = 3.d$	Caso31A	Caso31B	Caso32A	Caso32B

Foi definido o parâmetro adimensional de distância relativa (L/d), a fim de facilitar a comparação entre os casos “A” e “B”. Do mesmo modo, para simplificar a análise dos casos em que $\alpha = 30^\circ$, definiu-se um comprimento de trinca relativo (a/d). Ainda, realizou-se a simulação da situação onde não há nódulos no material (denominado “Caso 0”), de modo a obter uma referência para comparação com os demais casos.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 6 representa de forma gráfica os dados obtidos com a alteração da distância inicial do nódulo em relação à ponta da trinca, com $\alpha=0^\circ$, demonstrando o aumento percentual de K_I em relação à ausência de nódulos (Caso 0).

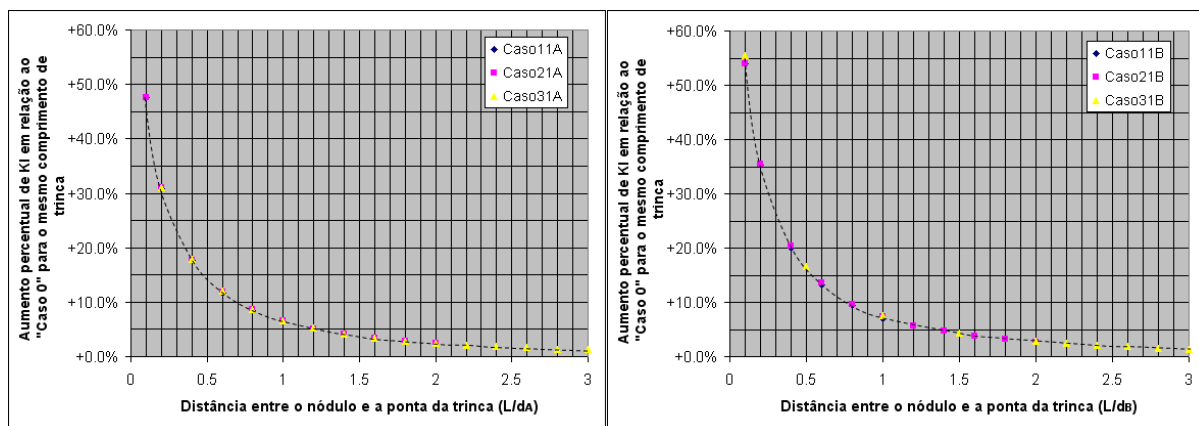


Figura 6. Aumento percentual de K_I em relação à ausência de nódulos (Caso 0), quando com mesmo comprimento de trinca, para diferentes distâncias entre o nódulo e a ponta da trinca, para os nódulos de menor (A) e maior diâmetro (B)

Os valores de direção de propagação e K_{II} foram omitidos, visto que se mostraram nulos ou desprezíveis (na ordem de 10^{-3} graus, e 0,05% de K_I , respectivamente). Observa-se que há um aumento de K_I com a presença do nódulo, e, ainda, K_I aumenta progressivamente conforme a trinca se aproxima do nódulo (isto é, quando L/d diminui). Este fenômeno está de acordo com o esperado, devido à baixa rigidez apresentada pelo nódulo em relação à matriz [4].

Nota-se que os casos de maior diâmetro de nódulo (B) apresentaram maiores valores de K_I em relação aos nódulos de menor diâmetro (A), especialmente para pequenas distâncias. Os modelos com nódulo maior apresentaram um aumento de até 55,5% em K_I ($L/d = 0,1$) em relação ao modelo sem nódulos (Caso 0), ao passo que os casos com nódulo menor apresentaram um aumento de apenas 47,5%.

As Figuras 7 e 8 ilustram o caminho de propagação da trinca e o campo de tensões para os Casos 31A e 31B. Como esperado, devido à simetria do modelo, as trincas não sofreram mudança na direção de propagação quando $\alpha=0^\circ$.

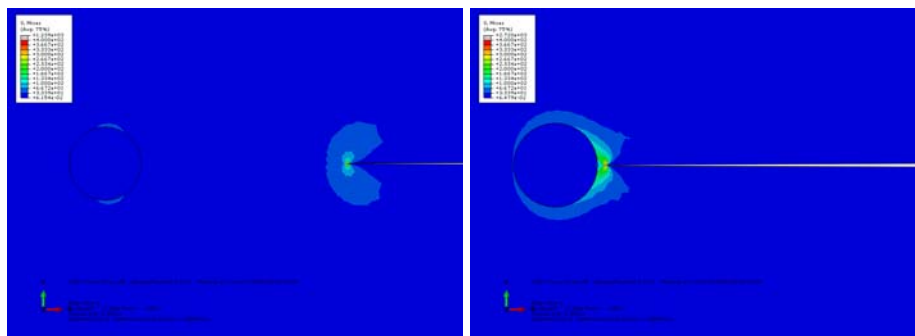


Figura 7. Visualização da primeira ($L/d = 3$) e última ($L/d = 0,1$) iterações de propagação da trinca e o campo de tensões de von-Mises para o Caso 31A.

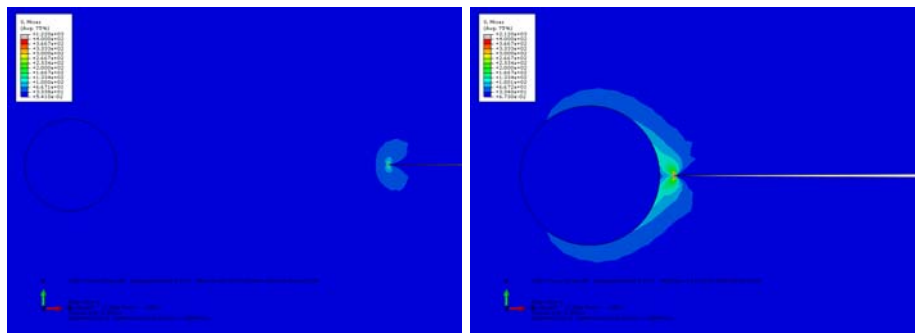


Figura 8. Visualização da primeira ($L/d = 3$) e última ($L/d = 0,1$) iterações de propagação da trinca e o campo de tensões de von-Mises para o Caso 31B.

A Figura 9 representa a propagação de trinca para o nódulo de menor diâmetro quando $\alpha=30^\circ$, enquanto a Figura 10 representa a propagação para o nódulo maior.

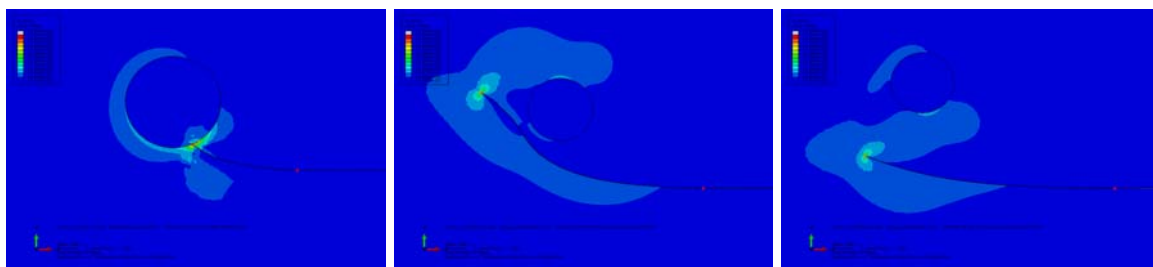


Figura 9. Visualização da última iteração de propagação da trinca e o campo de tensões de von-Mises para o nódulo de menor diâmetro, Casos 12A, 22A e 32A (da esquerda para a direita); o ponto vermelho indica a posição inicial da trinca.

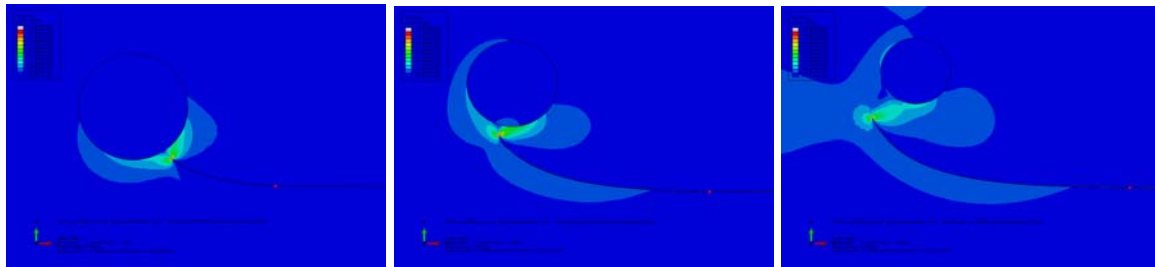


Figura 10. Visualização da última iteração de propagação da trinca e o campo de tensões de von-Mises para o nódulo de maior diâmetro, Casos 12B, 22B e 32B (da esquerda para a direita); o ponto vermelho indica a posição inicial da trinca.

É notável a influência da presença do nódulo na direção de propagação, mesmo para os casos em que o nódulo está inicialmente mais afastado da ponta da trinca. Ainda, observa-se que para os nódulos maiores (Figura 10) a mudança de direção se mostrou mais acentuada quando comparados aos nódulos menores.

Na Figura 11 estão representados os valores de K_I obtidos durante a propagação de trinca dos casos citados acima, e na Figura 12 os valores correspondentes de K_{II} .

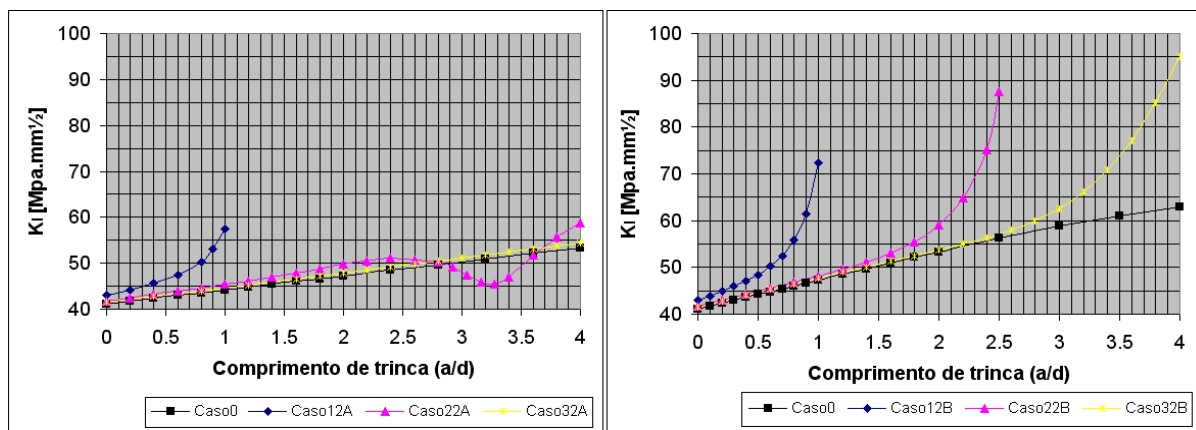


Figura 11. Comportamento de K_I durante a propagação de trinca, com $\alpha=30^\circ$, para diferentes distâncias iniciais entre o nódulo e a ponta da trinca, para nódulos de menor (A) e maior diâmetro (B)

Analisando primeiramente os casos com nódulo menor (A), observa-se que há uma influência significativa em K_I no Caso 12A ($L = 1.d$), chegando a um aumento de 21,4% em K_I em relação ao mesmo comprimento de trinca na ausência do nódulo (Caso 0). Por outro lado, para o Caso 32A ($L = 3.d$), esta influência já é menos expressiva, não ultrapassando 2,1% de aumento em K_I . Para a distância intermediária (Caso 22A), no entanto, observou-se um comportamento de K_I dissimilar a todos os demais casos, por não ser estritamente crescente durante a propagação da trinca. Isto é, em dado momento há um decréscimo nos valores de K_I e K_{II} . Esta ocorrência pode estar associada à modificação causada pelo nódulo no campo de tensões na região por onde a trinca caminha nestes instantes, no sentido de amenizar as tensões decorrentes do carregamento aplicado, devido à menor rigidez da grafita.

Com relação aos casos com nódulo maior (B), assim como nos casos em que $\alpha=0^\circ$, nota-se que o tamanho maior do nódulo tem influência mais significativa nos valores dos fatores intensidade de tensão quando comparado ao nódulo menor. No Caso 12B, por exemplo, K_I apresentou 52,8% de aumento em relação ao mesmo comprimento de trinca na ausência do nódulo; para o Caso 22B, este aumento chega a 55,8%; para o Caso 32B, 50,8%. Novamente, como ocorre com $\alpha=0^\circ$,

observa-se que os fatores intensidade de tensão sofrem maior influência quando a distância entre a ponta da trinca e o nódulo é pequena.

Comparando as trincas das Figuras 9 e 10, observa-se que o desvio no caminho percorrido pela trinca nos casos de nódulo maior se apresenta sensivelmente mais acentuado, quando comparado aos casos de nódulo menor, fato que pode ser atribuído a esta maior influência do tamanho maior de nódulo.

O comportamento observado nos casos de nódulo maior (maiores valores de SIFs) indica que a evolução de uma trinca nestas condições tende a ocorrer a uma taxa de propagação mais elevada quando comparada à mesma situação com nódulos de menor diâmetro. Sendo assim, os resultados sugerem que o material com nódulos maiores apresenta, também, maiores taxas de desgaste.

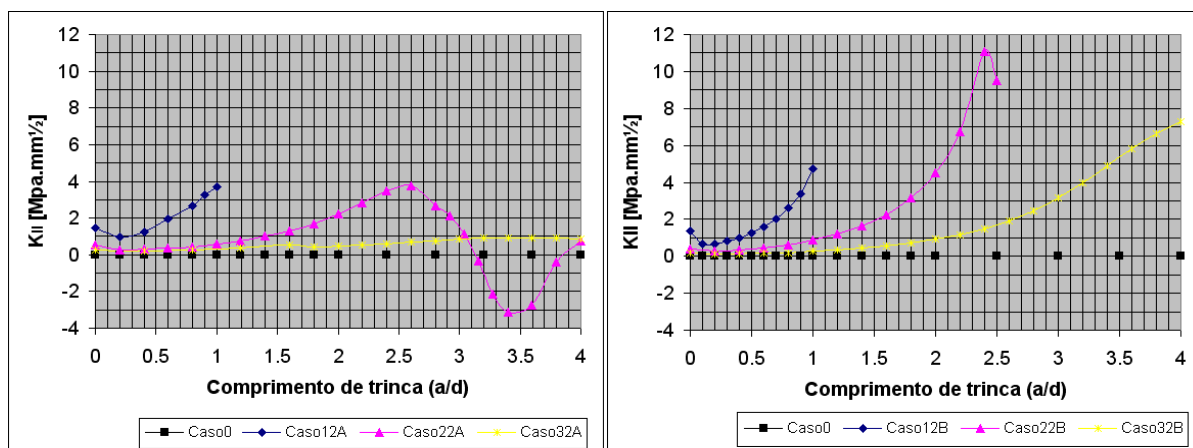


Figura 12. Comportamento de K_{II} durante a propagação de trinca, com $\alpha=30^\circ$, para diferentes distâncias iniciais entre o nódulo e a ponta da trinca, para nódulos de menor (A) e maior diâmetro (B)

De modo geral, nos casos em que $\alpha=30^\circ$, observa-se que o comportamento de K_{II} se assemelhou ao apresentado por K_I .

4 CONCLUSÃO

A presença de nódulo de menor rigidez inserido na matriz influencia no comportamento de trincas no material. Os fatores intensidade de tensão apresentam um aumento significativo, principalmente quando a trinca se aproxima do nódulo, independente da posição inicial do nódulo em relação à trinca ($\alpha=0^\circ$ ou 30°). Observou-se ainda que a presença do nódulo influencia significativamente no caminho percorrido pela trinca.

Em geral, os nódulos de maior diâmetro apresentaram maior influência no comportamento da trinca, como pôde ser visto pelos maiores valores de K_I , K_{II} e direção de propagação. Desta forma, estes resultados indicam que a evolução de uma trinca em uma matriz com nódulos maiores tende a ocorrer a uma taxa de propagação mais elevada quando comparada à mesma situação com nódulos de menor diâmetro. Tendo em vista que maiores taxas de propagação de trincas sugerem maiores taxas de desgaste, os resultados apresentados sugerem uma concordância com os resultados experimentais, uma vez que o ADI 1 (maior diâmetro médio de nódulo) apresenta, de fato, maior taxa de desgaste que o ADI 2 (menor diâmetro médio de nódulo) em ensaio do tipo FZG.

Todavia, cabe ressaltar que o presente estudo tratou da análise de nódulos individuais e trinca sob um carregamento específico. Para complementar as

conclusões deste estudo, sugere-se que sejam abordadas diferentes geometrias e condições de contorno, e ainda a adição de múltiplos nódulos, a fim de se verificar a influência de nódulos vizinhos sobre campo de tensões adjacente.

Agradecimentos

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelo apoio financeiro através do Programa de Apoio à Pesquisa Científica e Desenvolvimento Tecnológico (PAPCDT), edital 07/2014 – PROPPG.

REFERÊNCIAS

1. Guessser, W., Koda, F., Martinez, J., Da Silva, C. Austempered Ductile Iron For Gears. Congresso SAE Internacional: 2012-36-0305 , 2012.
2. Martinez, J. A. B. Comparação da resistência ao desgaste por fadiga de contato de engrenagens fabricadas em aço AISI 4140 e ferro fundido nodular austemperado. 2011. 125f. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) – UTFPR, Curitiba
3. Gans, L.H.A., Martinez, J. A. B., Koda, F. Guessser, W. L., Da Silva, C. H. Effect of Size Nodule Graphite on the Wear Resistance of ADI: A Finite Element Study. TribobR 2014. 2014.
4. Kohout, J. A simple relation for deviation of grey and nodular cast irons from Hooke's law. Materials Science and Engineering A313, 2001, p. 16–23.
5. Komvopoulos, K. Cho, S. S. Finite element analysis of subsurface crack propagation in a half-space due to a moving asperity contact. 1997. Department of Mechanical Engineering, University of California. Berkeley, USA.
6. Dommarco, R. C., Bastias, P. C., Dall'o, H. A., Hahn, G. T., Rubin, C. A. Rolling contact fatigue (RCF) resistance of austempered ductile iron (ADI). Wear 221.1 (1998): 69-74.
7. Gans, L.H.A. Análise Numérica para estudo de desgaste em ferro fundido nodular utilizado em engrenagens, 2013, Relatório de Pesquisa do Programa de Iniciação Científica-UTFPR, Curitiba.
8. Lazzaron, Jaqueline. Modelo de elementos finitos para análise da presença de nodulos de grafita na região do contato entre dentes de engrenagens. 2014, Relatório de Pesquisa do Programa de Iniciação Científica-UTFPR, Curitiba.
9. Fajdiga, G., Sraml, M. Fatigue crack initiation and propagation under cyclic contact loading. 2009. Engineering Fracture Mechanics 76 (2009): 1320–1335.
10. Jurenka, J. Španiel, M. Simulation of Pitting Formation in Gearing. 2012. Engineering Mechanics 2012. 252: 569–578.
11. Talemi, R. H. Numerical Modelling Techniques for Fretting Fatigue Crack Initiation and Propagation. 2014. Ghent University, Ghent.
12. Yan, Wenyi. Pun, Chung Lun, WUA, Zonghui. Some issues on nanoindentation method to measure the elastic modulus of particles in composites. 2011. Composites: Part B 42 (2011): 2093–2097.
13. ABAQUS analysis user's manual version 6.10. Dassault Systemes Simulia Corp.: Providence, RI, USA.
14. Anderson, Ted L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. CRC press, 2005.