MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À MECÂNICA DA FRATURA[1]

Afonso Henrique Sobreira de Oliveira[2]
Marcílio Sousa da Rocha Freitas[3]
Luiz Antonio de Souza[4]
Nelson Francisco Favilla Ebecken[5]

Resumo

Neste trabalho, avaliam-se alguns modelos de análise de propagação de trincas em estruturas planas e axissimétricas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os parâmetros da Mecânica da Fratura obtidos para avaliar a instabilidade da trinca são: o fator de intensidade de tensão K, a integral J e a taxa de dissipação de energia na trinca G. Na Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) obtém-se este último parâmetro através do Método Implícito da Extensão Virtual da Trinca (MIEVT). Através de aplicações, faz-se um estudo comparativo entre os parâmetros em questão.

Palavras-Chaves

Método dos Elementos Finitos
Mecânica da Fratura Linear Elástica
Mecânica da Fratura Elasto- Plástica

I. INTRODUÇÃO

Atualmente, a seleção de materiais empregados na engenharia na obtenção de sistemas estruturais não é realizada apenas em função dos níveis de tensões, mas também para tolerar defeitos decorrentes de fratura.

Desta forma, quando se analisa uma estrutura sujeita a trincas, é importante a determinação de parâmetros que possam monitorar o comportamento destas. Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), um dos principais parâmetros é o fator de intensidade de tensão K, que é uma grandeza utilizada para quantificar o nível de tensão na ponta da trinca e depende basicamente do carregamento e da geometria. Outros importantes parâmetros da MFLE são: a integral J e a taxa de

---

[1] I SEMINÁRIO DE MECÂNICA DA FRATURA
[2] Dpto. de Projetos e Construção Civil - UNESP - Campus de Guaratinguetá
[3] Dpto. de Engenharia Civil - Escola de Minas - UFOP
[4] Instituto Politécnico do Rio de Janeiro - UERJ
[5] Programa de Engenharia Civil - COPPE - UFRJ

liberação de energia potencial G. Através destes é possível obter-se o fator de intensidade de tensão K utilizando-se relações desenvolvidas por Irwin [1].

A determinação de K de forma analítica só é viável em algumas situações. Com a diversidade e complexidade de geometria e carregamento apresentadas na maioria dos problemas práticos tornou-se necessária a utilização de métodos numéricos, dentre os quais o Método dos Elementos Finitos tem sido o mais utilizado para este fim.

A integral e a taxa de liberação de energia potencial G são também utilizados na Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). Para a determinação deste último parâmetro é utilizado o Método Implícito da Extensão Virtual da Trinca (MIEVT).

II. MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À MFLE

II.1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o método dos elementos finitos tornou-se uma técnica numérica bastante utilizada na solução de problemas da mecânica da fratura, principalmente quando a obtenção da solução analítica do referido problema tornava-se impraticável. Alguns métodos têem sido empregados (Owen e Fawkes [2]), direta ou indiretamente, na obtenção do fator de intensidade de tensão K. Este podem ser divididos basicamente em três grupos:

-Método da extrapolação de deslocamentos

-Métodos energéticos (Método da taxa de energia de deformação liberada e Método da extensão virtual da trinca)

-Método da integral J

Estudos iniciais envolvendo o uso do método dos elementos finitos em Mecânica da Fratura empregaram elementos convencionais de tensão constante e notou-se a necessidade de malhas extremamente refinadas na vizinhança da ponta da trinca com o objetivo de representar, com uma precisão satisfatória, a singularidade dos campos de tensão e deformação na referida região.

O desenvolvimento de elementos de alta ordem, tal como os elementos isoparamétricos, permitiu que a mesma ordem de precisão fosse obtida com malhas menos refinadas. Com o objetivo de melhorar a representação dos campos de tensão e deformação na ponta da trinca, foram criados alguns elementos especiais para serem utilizados nessas regiões. Porém, com o aparecimento dos elementos *quarter-point*, desenvolvidos por Henshell e Shaw [3], tornou-se desnecessária a utilização dos elementos especiais acima citados.

II.2 - MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTO

Com o auxílio da teoria da elasticidade e de funções de tensões com variáveis complexas, é possível estabelecer o campo de tensões e deslocamentos na vizinhança da ponta da trinca. A partir desta equações pode-se obter as seguintes expressões que relacionam os fatores de intensidade de tensão e deslocamentos:

$$K_I \begin{Bmatrix} (2\kappa - 1)\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ (2\kappa + 1)\mathrm{sen}(\theta/2) - \mathrm{sen}(3\theta/2) \end{Bmatrix} = 4\mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$K_{II} \begin{Bmatrix} -(2\kappa + 3)\mathrm{sen}(\theta/2) - \mathrm{sen}(3\theta/2) \\ (2\kappa - 3)\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} = 4\mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Obtendo-se os deslocamentos *u* e *v*, via análise em elementos finitos, e substituindo-se esses valores nas expressões acima, pode-se calcular os valores de K_I e K_{II} para diversos pontos nodais variando-se *r*, para um determinado valor de θ. Elaborando-se um gráfico de K_I ou K_{II} versus *r*, descartando-se os resultados relativos a pontos próximos à ponta da trinca e extrapolando-se a solução para $r = 0$, encontra-se o valor aproximado do fator de intensidade de tensão desejado, como mostrado na Figura 1. Para este tipo de análise pode-se utilizar, na ponta da trinca, elementos convencionais ou elementos *quarter-point*.

II.3 - MÉTODO DA TAXA DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO LIBERADA

Considera-se uma trinca de comprimento *a*, aumentando-se este comprimento com um incremento δa causa-se uma liberação de energia de deformação δU. Como já definido anteriormente, a taxa de energia de deformação liberada (G) é dada pela razão entre δU e δa, ou seja, $G = \delta U / \delta a$.

A obtenção de G, em termos práticos, dá-se através de duas análises via elementos finitos para dois comprimentos de trinca que diferem de δa. Para cada configuração é calculada a energia de deformação correspondente através da seguinte expressão:

$$U = \mathbf{u}' \; \mathbf{K} \; \mathbf{u} \tag{3}$$

onde **u** é o vetor global de deslocamentos e **K** a matriz de rigidez global. Sabendo-se que o produto **Ku** representa o vetor global de cargas aplicadas **f**, pode-se representar a equação (3) da seguinte forma:

$$U = \mathbf{u}' \; \mathbf{f} \tag{4}$$

Obtida a energia de deformação para cada configuração de comprimento de trinca, pode-se calcular facilmente δU pela diferença entre as energias em cada configuração. Desta forma torna-se possível a obtenção de G, e utilizando-se as equações de Irwin, que relaciona G com K, obtêm-se os fatores de intensidade de tensão.

II.4 - MÉTODO DA EXTENSÃO VIRTUAL DA TRINCA

Parks [4] e Hellen [5], na década de 70, propuseram uma variante do método da taxa de energia de deformação liberada, o método da extensão virtual da trinca.

Considera-se um pequeno incremento virtual Δa no comprimento da trinca, sem variação na carga externa. A energia potencial total é expressa por:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^t\ \mathbf{K}\ \mathbf{u} - \mathbf{u}\ \mathbf{f} \tag{5}$$

Variando Π em relação à carga constante, obtém-se:

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^t\ \delta\mathbf{K}\ \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}^t\ \mathbf{K}\ \mathbf{u} - \delta\mathbf{u}^t\ \mathbf{f} - \mathbf{u}^t\ \delta\mathbf{f} \tag{6}$$

mas sabe-se que $\mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{f}$, então

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^t\ \delta\mathbf{K}\ \mathbf{u} - \mathbf{u}^t\ \delta\mathbf{f} \tag{7}$$

Considerando que o carregamento é devido a forças aplicadas fora dos elementos da ponta da trinca, o vetor $\delta\mathbf{f}$ é nulo, assim o segundo termo da expressão acima desaparece, passando $\delta\Pi$ ser expresso por:

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^t\ \delta\mathbf{K}\ \mathbf{u} \tag{8}$$

Portanto,

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^t\left[\frac{\partial\,\mathbf{K}}{\partial\,a}\right]\mathbf{u} \tag{9}$$

A matriz de variação de rigidez $\delta\mathbf{K}$ é nula para todos os elementos que não contêm a ponta da trinca, desde que apenas há mudança de geometria na ponta da trinca. Portanto $\delta\mathbf{K}$ recebe apenas contribuições dos elementos que contêm a mesma. Desta forma, conhecido o vetor $\mathbf{u}$ e montando-se a matriz total $\delta\mathbf{K}$, pode-se calcular G no final de uma análise simples. Este procedimento torna-se mais econômico que utilizar duas análises em elementos finitos para duas configurações distintas de comprimento de trinca, onde G é calculado pela razão entre a diferença de energia de deformação liberada para cada uma das configurações e o incremento dado no comprimento de trinca.

Vale salientar que cuidados devem ser tomados na escolha do incremento de comprimento de trinca a fim de se evitar perda de precisão na obtenção do parâmetro G.

II.5 - MÉTODO DA INTEGRAL J

A integral J é um parâmetro da mecânica da fratura que pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$J = \int_{\Gamma}\left(U\,dy - \mathbf{t}_i\frac{\partial\,\mathbf{u}_i}{\partial\,x}\,ds\right) \tag{10}$$

onde

U = energia de deformação por unidade de volume

$\mathbf{t}_i$ = vetor de tração normal e exterior ao contorno

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{ij}\ \mathbf{n}_j \tag{11}$$

$\mathbf{u}_i$ = vetor de deslocamento
ds = elemento do contorno Γ
Γ = contorno fechado

Desde que a integral J é independente do caminho adotado, este pode ser convenientemente escolhido de tal maneira que coincida com a linha $\xi = \xi_p$ = constante , como mostrado na Figura 2. Desenvolvendo-se a expressão (10) obtém-se, para estado plano, a seguinte expressão:

$$J^{(c)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[\left(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta \tag{12}$$

e para estado axissimétrico,

$$J^{(c)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[\left(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta \tag{13}$$

onde

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11} - \nu \left(\sigma_{22} + \sigma_{33} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{22} - \nu \left(\sigma_{11} + \sigma_{33} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1-\nu)}{E} \sigma_{12}$$

e para estado axissimétrico

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{33} - \nu \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} \right) \right]$$

Pode-se notar que calculadas as tensões e deformações, por um programa padrão de elementos finitos, facilmente obtém-se a integral J. Normalmente calcula-se J para distintos caminhos e posteriormente toma-se seu valor médio.

III. MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À MFEP

III.1 INTRODUÇÃO

Na Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP), a utilização de K perde o sentido devido à zona plástica formada na ponta da trinca e, neste caso, são utilizados outros parâmetros no monitoramento da trinca, tais como: o COD (Crack Openning Displacement), que é o deslocamento plástico medido na ponta da trinca, a integral J e G, anteriormente citados. Valores críticos para esses parâmetros são obtidos experimentalmente para cada tipo de material.

Para Mecânica da Fratura Não-linear, o principal caso de interesse é para materiais elasto-plásticos. A obtenção de G pelo método da extensão virtual da trinca requer a realização de duas análises para dois comprimentos de trinca que diferem de Δa. Neste caso a obtenção de G torna-se onerosa, principalmente quando requer uma análise não-linear. Um novo procedimento para este método foi apresentado, o Método Implícito da Extensão Virtual da Trinca (MIEVT), que possibilita a obtenção de G com apenas uma análise. Isto é conseguido através de uma minimização direta da energia potencial.

O Método da Extensão Virtual da Trinca (MEVT) usando a minimização direta de energia foi usada por Haber e Koh [6] para modos mistos da MFLE, e por Sussman e Bathe [7] também para MFLE. Ambos utilizaram elementos bidimensionais. Hellen [8] extendeu esta aproximação básica a materiais com comportamento elasto-plástico incremental, com a hipótese requerida de resposta não-linear elástica, com carregamento monotonicamente crescente e com tipos arbitrários de elementos na ponta da trinca, incluindo formulações especiais de singularidade. Esta também cobre o caso tridimensional.

III.2 INTEGRAL J NA MFEP

A integral J, como anteriormente mostrada, é definida pela equação (10).

Tomando-se um carregamento monotônico, torna-se válida a aproximação de identificar o comportamento elástico não-linear com o comportamento plástico. Desta forma torna-se possível a utilização de um programa comum de elementos finitos que efetua análise não-linear de estruturas em regime elasto-plástico, como mostrado em Owen e Fawkes [2], para obtenção do parâmetro integral J.

Para aplicações elasto-plásticas, a densidade de energia de deformação U pode ser decomposta em duas parcelas, uma elástica e outra plástica, ou seja:

$$U = U_E + U_P \tag{14}$$

sendo U_E definido por:

$$U_E = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\left(\varepsilon_{ij}\right)_E \tag{15}$$

onde

$\left(\varepsilon_{ij}\right)_E$ = componente elástica de deformação

A parcela plástica U_P é definida por:

$$U_P \equiv \int_0^{\bar{\varepsilon}_P} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}_P \tag{16}$$

onde

$\bar{\sigma}$ = tensão efetiva

$\bar{\varepsilon}_p$ = deformação plástica efetiva

O valor de U_P é obtido acumulando-se contribuições de incrementos de trabalho $\bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}_P$ ao longo do caminho de deformações. Como a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ e o incremento de deformação plástica $d\bar{\varepsilon}_P$ são avaliados durante cada incremento de carga no programa de análise elasto-plástica utilizado, o cálculo de U_P torna-se uma operação trivial.

Efetua-se análise não-linear de estruturas planas ou sólidos axissimétricos em regime elasto-plástico, utilizando-se para discretização espacial o método dos elementos finitos com uma formulação baseada em deslocamentos, com elementos bi-dimensionais isoparamétricos de oito nós com funções da família Serendipity.

A análise é feita de forma incremental, com a possibilidade de utilização dos algoritmos: "initial stress approach", Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado. O critério elasto-plástico pode ser descrito pelos critérios de Von-Mises ou Tresca.

Para problemas planos, a parcela elástica da densidade de energia de deformação pode ser escrita como:

$$U_E = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}(\varepsilon_{11})_E + 2\sigma_{12}(\varepsilon_{12})_E + \sigma_{22}(\varepsilon_{22})_E\right] \tag{17}$$

e para problemas axissimétricos,

$$U_E = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}(\varepsilon_{11})_E + 2\sigma_{12}(\varepsilon_{12})_E + \sigma_{22}(\varepsilon_{22})_E + \sigma_{33}(\varepsilon_{33})_E\right] \tag{18}$$

Desta forma as equações (11) e (12) apresentar-se-ão, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}(\varepsilon_{11})_E + 2\sigma_{12}(\varepsilon_{12})_E + \sigma_{22}(\varepsilon_{22})_E\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + U_P \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & - \left[(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2)\frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\Bigg\} d\eta \end{aligned} \tag{19}$$

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}(\varepsilon_{11})_E + 2\sigma_{12}(\varepsilon_{12})_E + \sigma_{22}(\varepsilon_{22})_E + \sigma_{33}(\varepsilon_{33})_E\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + U_P\frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2)\frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\right\} d\eta \tag{20}$$

onde

$$(\varepsilon_{11})_E = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right]$$

$$(\varepsilon_{22})_E = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right]$$

$$(\varepsilon_{12})_E = \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_{12}$$

e para sólido axissimétrico,

$$(\varepsilon_{33})_E = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]$$

III.3 MÉTODO IMPLÍCITO DA EXTENSÃO VIRTUAL DA TRINCA

A taxa de dissipação de energia na trinca, denominada G, é outro parâmetro bastante utilizado na Mecânica da Fratura. Para seu cálculo tem-se usado uma técnica de caráter numérico, o Método da Extensão Virtual da Trinca, que utiliza o Método dos Elementos Finitos como ferramenta. Esta tem-se mostrado bastante eficiente e precisa na resolução de problemas em regime linear-elástico.

Para obtenção de G o referido método requer a realização de duas análises por elementos finitos para dois comprimentos de trinca que diferem de Δa, onde G e dado por:

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \approx -\frac{\Delta \Pi}{\Delta a} \tag{21}$$

Vale ainda salientar que alguns cuidados devem ser tomados na escolha de Δa para que não haja perda de precisão na obtenção do parâmetro G.

Com o objetivo de avaliar G em uma única etapa e sem perda de precisão, um novo procedimento para o Método da Extensão Virtual da Trinca foi apresentado por Hellen [8], o Método Implícito da Extensão Virtual da Trinca (MIEVT). Este procedimento utiliza uma minimização direta de energia potencial, que é componente essencial na teoria dos elementos finitos em análise de tensões.

Usualmente, a energia potencial Π é minimizada em relação aos graus de liberdade de deslocamento, porém como Π pode ser expressa como uma função de outras variáveis, pode-se então minimizar Π, por exemplo, em relação ao comprimento da trinca.

A energia potencial total é dada por:

$$\Pi = \sum_j W_j - \mathbf{u}' \, \mathbf{F} \tag{22}$$

onde

$\mathbf{F}$ = vetor de forças
$\mathbf{u}$ = vetor de deslocamentos
W_j = energia de deformação acumulada em cada ponto j

$$W_j = \sum_i \Delta W_{ij} \; \Delta V_j \tag{23}$$

onde ΔV_j é o volume representado pelo ponto j, e i indica acumulação sobre a história do carregamento.

Como $W_j = W_j(u,x)$ é uma função dos deslocamentos e da geometria, a primeira variação da energia potencial total é dada por:

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{u}' \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{x}' \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{24}$$

ou

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{u}^t \left[\sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{F} \right] + \delta \boldsymbol{x}^t \left[\sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}^t}{\partial \boldsymbol{x}} \mathbf{u} \right] \tag{25}$$

O primeiro termo da equação (25) é nulo, ou devido a $\delta \mathbf{u}'$ ser zero nos nós com graus de liberdade restritos ou devido ao termo entre cochetes ser nulo por causa do equilíbrio. Desta forma, tem-se:

$$\delta \Pi = \delta \boldsymbol{x}^t \left[\sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{F}^t}{\partial \boldsymbol{x}} \mathbf{u} \right] \tag{26}$$

Para extensões na vizinhança da ponta da trinca $\partial \boldsymbol{F}$ é invariavelmente nulo, portanto o segundo termo pode ser ignorado. Considera-se que não haja variação em $\boldsymbol{F}$, obtém-se:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta a} = \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial a} \tag{27}$$

Este somatório afeta apenas os elementos da ponta da trinca, pois nos demais $\partial W / \partial a$ é zero.

Utilizando-se transformações, similares às utilizadas na teoria de elemento isoparamétrico, do espaço real V para o espaço adimensional V_0, tem-se para qualquer $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial W_j}{\partial \boldsymbol{x}} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{x}} |J| + W \frac{\partial |J|}{\partial \boldsymbol{x}} \right) \tag{28}$$

onde

$|J|$ = determinante da matriz de transformação jacobiana [J]

e para materiais homogêneos linear ou não-linear elástico,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x} = \sigma_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x} \tag{29}$$

Assumindo-se que o grau de liberdade a ser perturbado em Π seja x_i^n , a i-ésima componente do nó n, então:

$$G = -\frac{\partial W}{\partial x_i^n} = -\int_{V_0} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i^n} |J| + W \frac{\partial |J|}{\partial x_i^n} \right\} dV \tag{30}$$

ou

$$G = -\frac{d\Pi}{d x_i^n} = -\int_{V_0} \left\{ W \frac{\partial h_n}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sigma_{kl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial h_n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial h_n}{\partial x_k} \right) \right\} |J| \, dV \tag{31}$$

IV. EXEMPLOS

IV.1 CHAPA TRACIONADA

Apresenta-se este exemplo com o objetivo de comparar os resultados obtidos utilizando-se os métodos da MFLE, apresentados neste trabalho, na obtenção do fator de intensidade de tensões K. Analisa-se uma chapa tracionada em suas extremidades com uma trinca central de comprimento $2a$ (Figura 3). Esta chapa está sujeita ao modo I de trincamento. As caracteristicas físicas e geométricas da chapa são:

comprimento da chapa: L = 500 mm
largura da chapa: 2W = 200 mm
comprimento da trinca: $2a$ = 80 mm
espessura da chapa: t = 1 mm
módulo de elasticidade: E = 10000 N/mm^2
coeficiente de Poisson: ν = 0.3
carregamento de tração: σ = 100 N/mm^2

Utilizando-se da simetria da geometria e do carregamento, discretiza-se apenas um quarto da chapa. A malha de discretização apresenta-se na Figura 4.

O valor teórico mostrado na Tabela 1 foi obtido utilizando uma expressão apresentada por Rooke [9] , definida por:

$$K_I = \left(\frac{1 - 0.5(a/b) + 0.326(a/b)^2}{\sqrt{1-(a/b)}} \right) \sigma \sqrt{\pi a} \tag{32}$$

Usando-se a Equação (1) obtém-se os gráficos K_I x r apresentados na Figura 5, para θ = 180°, utilizando elementos convencionais e elementos *quarter-point* na ponta da trinca. Utilizando-se os resultados mostados na Figura 5 extrapolam-se retas para obtenção do valor de K_I em $r = 0$. Vale salientar que os dois pontos mais próximos do eixo vertical não são considerados na extrapolação das retas. Os valores extrapolados para $r = 0$ são mostrados na Tabela 1.

Em relação ao método da taxa de energia de deformação armazenada, foram adotados dois diferentes incrementos no comprimento de trinca para obtenção de K_I. Utilizando esses resultados e extrapolando-se por uma reta, obtém-se o valor de K_I para o tamanho original do comprimento de trinca (Figura 6), este apresenta-se na Tabela 1.

Para obtenção de K_I através do método da extensão virtual de trinca, adotou-se um incremento de trinca $\delta a = 0.001$ na direção x.

Para o cálculo da integral J, foram utilizados quatro diferentes caminhos de integração, e adotou-se seu valor médio para a obtenção de K_I, apresentado na Tabela 1.

IV.2 CORPO DE PROVA

Apresentam-se os resultados da análise do corpo de prova (C.P.) mostrado na Figura 7, para qual calculou-se a integral J e G pelo MIEVT e possibilitando-se assim uma posterior comparação de resultados obtidos através dos distintos métodos. A carga total de 18 KN foi aplicada através de dez incrementos. A curva tensão-deformação do material não-linear é mostrada na Figura 8. O coeficiente de Poisson do material é igual a 0.33.

Devido à simetria de geometria e de carregamento, discretizou-se apenas metade do C.P., com 50 elementos quadráticos de 8 nós, em estado plano de tensão. A malha de discretização utilizada é mostrada na Figura 9.

Apresentam-se, na Figura 10 a variação da integral J e G em função da carga aplicada e , na Figura 11, em relação à metade do deslocamento medido entre os pontos A e B da Figura 7 ($\delta_{AB}/2$). Através destas figuras nota-se uma boa concordância de resultados entre estes dois parâmetros, o mesmo ocorrendo quando comparados com resultados experimentais mostrados em Bleackley [10].

IV.3 CILINDRO TRACIONADO

Analisa-se um cilindro tracionado em suas extremidades com uma trinca localizada na face exterior de comprimento a, a uma distância L/2 das extremidades, como mostrado na Figura 12. Devido à geometria da estrutura e ao seu carregamento, pode-se considerar a mesma sob estado axissimétrico. As características físicas e geométricas do cilindro são:

comprimento do cilindro: L = 500 mm
diâmetro do cilindro: D = 200 mm
comprimento da trinca: a = 40 mm
coeficiente de Poisson: ν = 0.33

A tensão σ total de $360 N/mm^2$ foi aplicada em 15 incrementos. Considerou-se a mesma curva tensão-deformação utilizada pelo exemplo 2, ou seja, a curva mostrada na Figura 8.

Apresenta-se na Figura 13 a variação da integral J e G em função da tensão aplicada. Nota-se através desta uma boa concordância entre os dois parâmetros analisados.

Apresentam-se na Figura 14 a malha de discretização adotada. Vale ainda salientar que devido à simetria da estrutura e carregamento discretizou-se apenas metade do cilindro, em 35 elementos quadráticos de 8 nós.

V. CONCLUSÕES

O trabalho aborda a aplicação do Método dos Elementos Finitos à Mecânica da Fratura e este mostrou-se uma ferramenta bastante eficiente na obtenção de parâmetros da MFLE e da MFEP, através dos diversos métodos numéricos aqui apresentados.

Os elementos *quarter-point* na ponta da trinca são de fácil utilização e apresentam bons resultados.

Os métodos aqui mostrados que necessitam de duas análise em elementos finitos requerem um tempo computacional significativamente superior aos que nessecitam de apenas uma análise, pois o tempo requerido no cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura é insignificante quando comparado ao de uma análise, isto torna-se cada vez mais acentuado a medida que cresce o número de elementos da malha de discretização.

Os resultados da taxa de dissipação de energia, G, obtidos pelo MIEVT apresentaram-se bastante próximos aos da integral J, como pode ser visto nas Figuras 10 e 13. Vale salientar que o tempo envolvido na obtenção dos parâmetros acima citados é significativamente inferior ao tempo gasto para se conseguir o equilíbrio para cada incremento de carga numa análise não-linear.

O uso do MIEVT abre novos horizontes para o estudo da mecânica da fratura, pois elimina a necessidade de dupla análise, reduzindo significativamente o tempo computacional requerido, e a possibilidade de perda de precisão na obtenção de G utilizando-se a expressão (21), quando feita uma má escolha de Δa. Vale ainda salientar como outra vantagem do MIEVT a posibilidade de obtenção de G em análise de trincas utilizando modelos tridimensionais.

VI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Irwin, G. R. 1948. "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", Journal of Applied Mechanics, 24, pp.361-364, 1957.

[2] Owen, D.R.J. e Fawkes, A.J. "Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications". Pineridge Press Ltd. - U.K, 1983.

[3] Henshell, R.D. e Shaw, K.G. "Crack Tip Elements Are Unnecessary". Int. J. Num. Meth. Engng. , vol. 9, 495-509, 1975.

[4] Parks, D.M. "A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Elastic Crack tip Stress Intensity Factors". Int. J. Fracture, vol. 10, No. 4, 487-502, 1974.
[5] Hellen, T.K. "On the Method of Virtual Crack Extensions". Int. J. Num. Meth. Engng. , vol. 9, No. 1, 187-208, 1975.
[6] Haber, R.B. e Koh, H.M. "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions". International Journal Num. Methods Eng., vol. 21, 301-315, 1985.
[7] Sussman, T. e Bathe, K.J. "The Gradient of the Finite Element Variational Indicator with Respect to Nodal Polar Coordinates". International Journal Num. Methods Eng., vol. 21, 763-774, 1985.
[8] Hellen, T.K. "Virtual Crack Extension Methods for Non-linear Materials". International Journal Num. Methods Eng., vol. 28, 929-942, 1989.
[9] Rooke, D.P. e Cartwright, D.J. "Compendium of Stress Intensity Factors". H.M.S.O, 1974.
[10] Bleackley, M.H. "A Numerical Study of Energy Criteria in Fracture Mechanics". Tese de Ph.D. - Universidade de Gales, 1981.

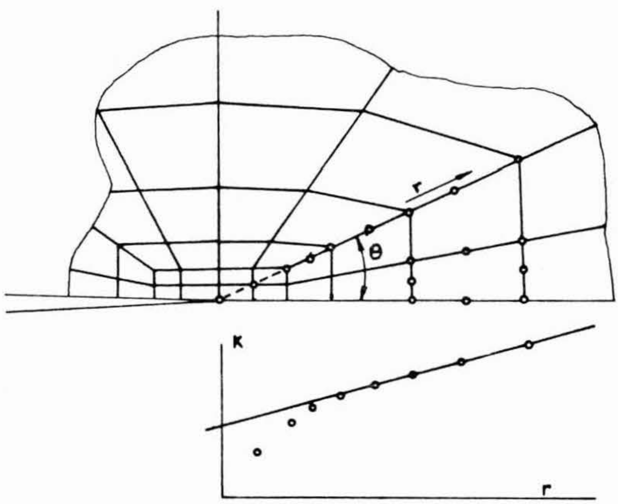

Figura 1 - Avaliação do Fator de Intesidade de Tensão K por Extrapolação

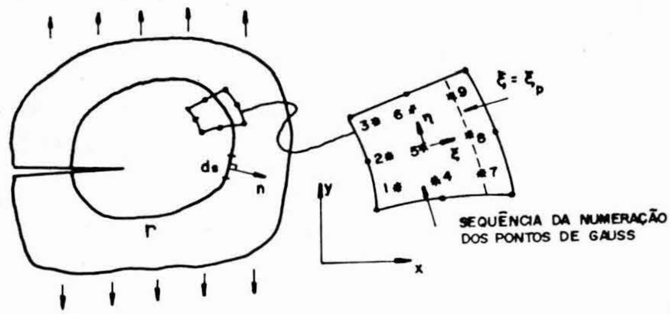

Figura 2 - Caminho Adotado no Cálculo da Integral J

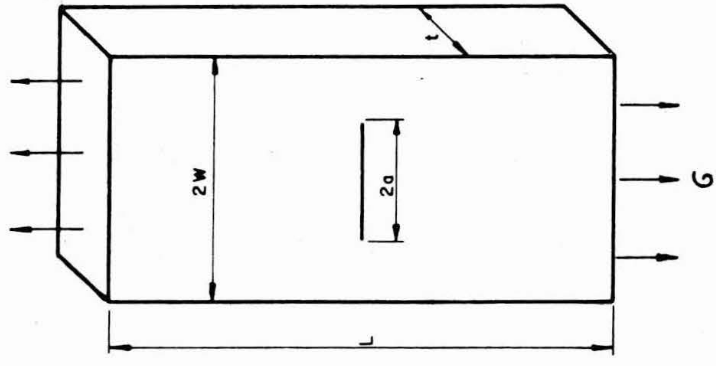

Figura 3 - Chapa Tracionada

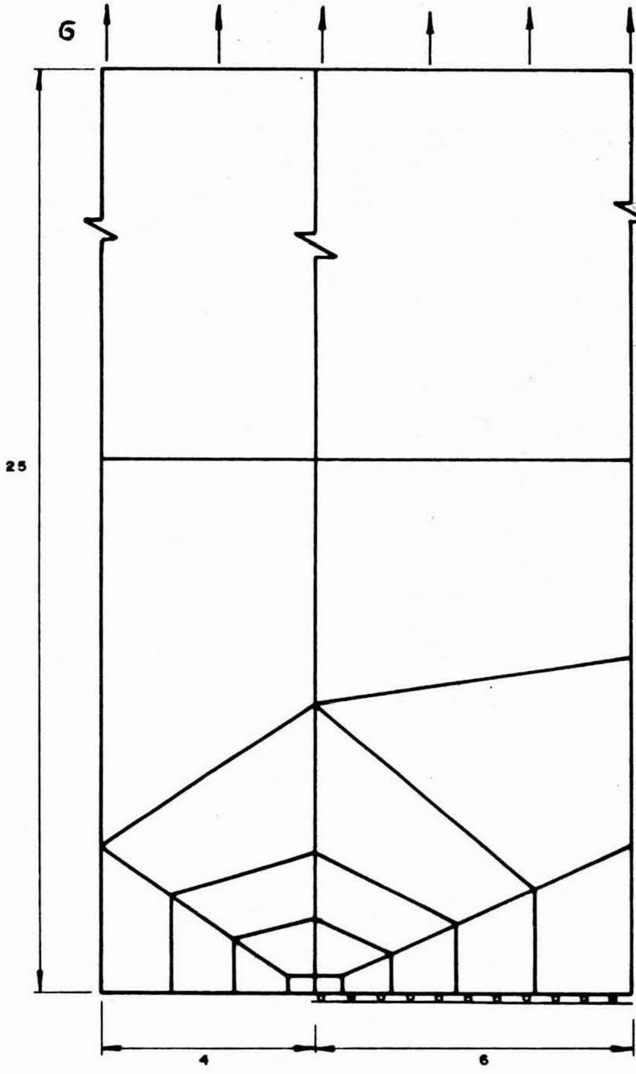

Figura 4 - Malha de Discretização da Chapa Tracionada

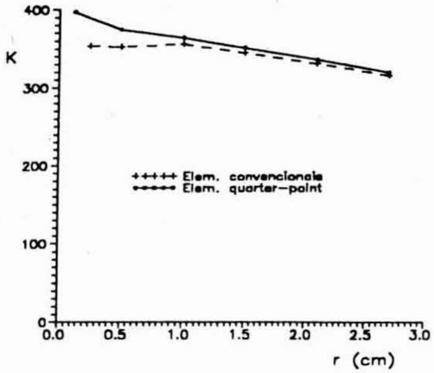

Figura 5 - Gráfico K_I x r ($\theta = 180°$)

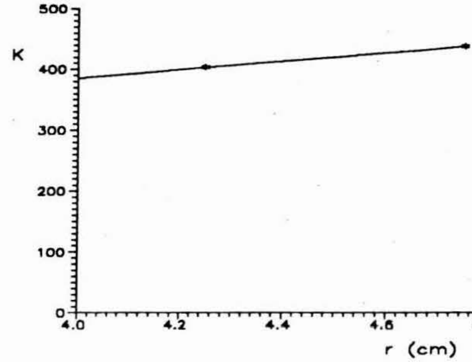

Figura 6 - Método da Taxa de Energia de Deformação Liberada

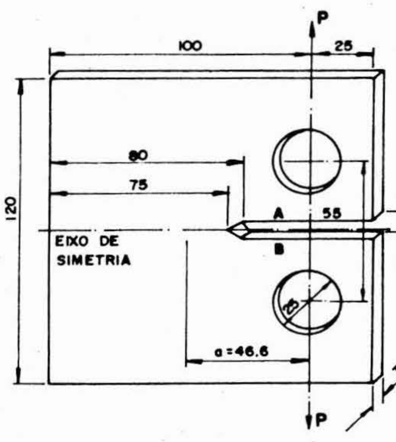

Figura 7 - Corpo de Prova Analisado

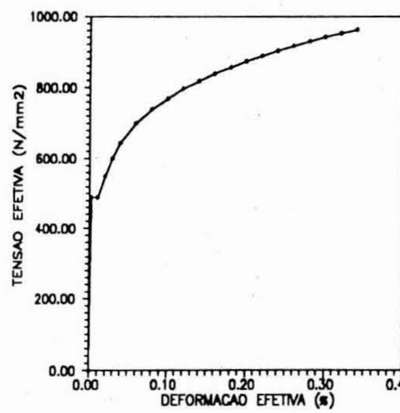

Figura 8 - Curva tensão-deformação

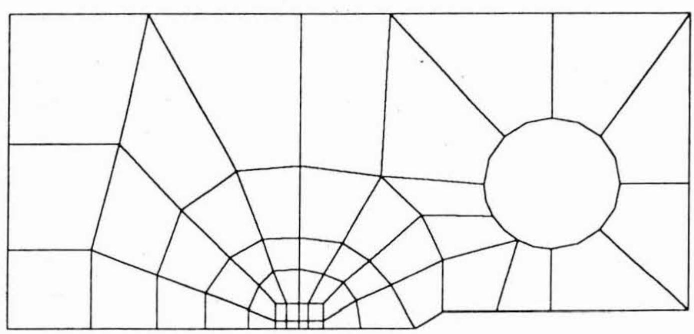

Figura 9 - Malha de Discretização do Corpo de Prova.

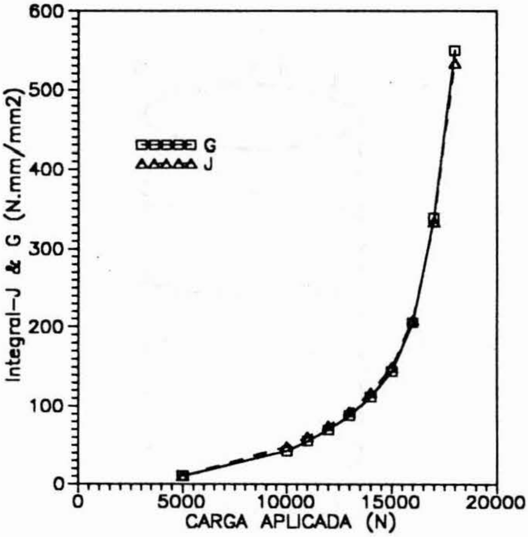

Figura 10 - Gráfico Integral J e G x Carga P

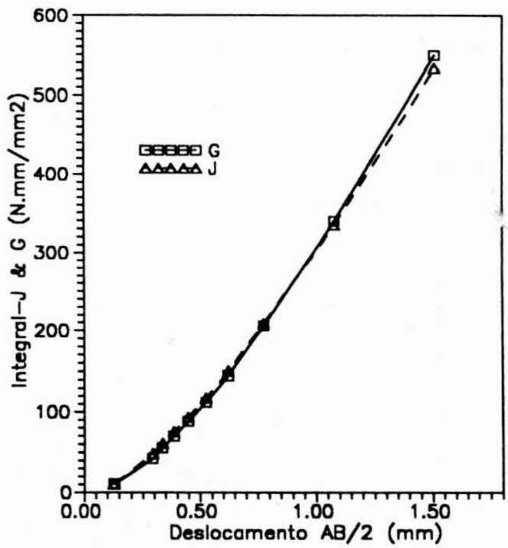

Figura 11 - Gráfico Integral J e G x δ_{AB} / 2

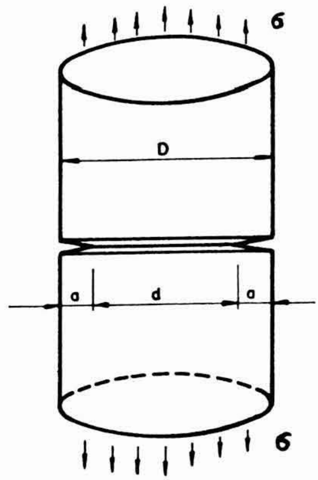

Figura 12 - Cilindro Tracionado

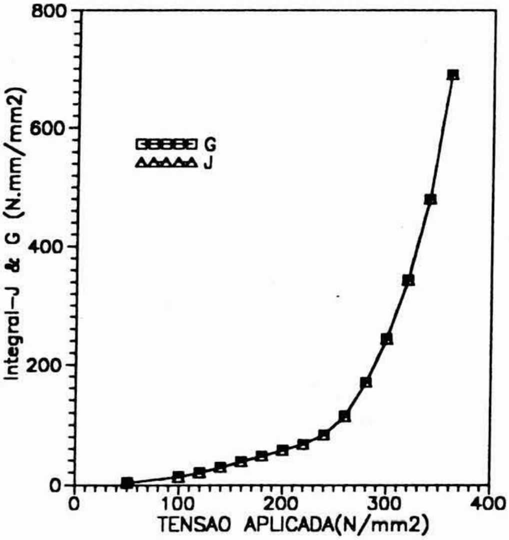

Figura 13 - Gráfico Integral J e G x Tensão Aplicada σ.

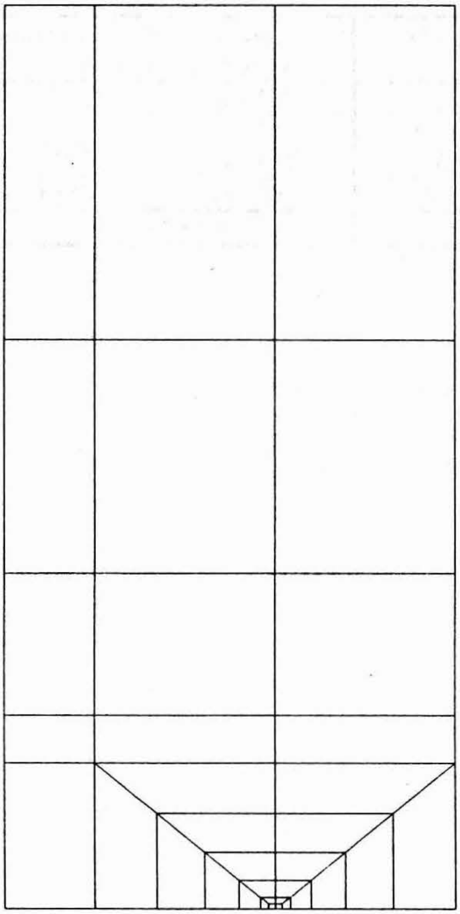

Figura 14 - Malha de Discretização do Cilindro Tracionado

Tabela 1 - Fator de Intensidade de Tensão K_I

Métodos	**Elementos convencionais**	**Elementos *quarter-point***
M.E.D.	380.902	390.840
M.T.E.D.L.	385.333	---
M.E.V.T.	386.581	397.045
M.I.J.	390.921	388.058
Teórico	398.987	