

# PROPOSIÇÃO DE UMA FORMULAÇÃO PROBABILÍSTICA PARA O MODELO DE ARCHARD<sup>1</sup>

Cláudio R. Ávila da Silva Júnior<sup>2</sup>  
Giuseppe Pintaúde<sup>3</sup>

## Resumo

Neste trabalho propõe-se um modelo probabilístico para o desgaste de duas superfícies em contato. Um problema de valor inicial é formulado a partir da particularização do modelo de Archard para o caso de contato em uma linha. Com base neste problema, duas formulações matemáticas para o modelo de desgaste são apresentadas. Na primeira, o coeficiente de desgaste é modelado como uma variável randômica, enquanto na segunda este coeficiente é modelado por um campo randômico. O método de simulação de Monte Carlo é utilizado para avaliar as soluções em termos dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem do campo randômico altura de desgaste. Pode-se observar a concordância entre as funções covariância apresentadas e as suas estimativas obtidas através da simulação de Monte Carlo. Para o caso em que a incerteza sobre o coeficiente de desgaste foi modelada por processo estocástico observou-se uma variância menor do que a observada no caso em que a incerteza foi modelada através de variável randômica.

**Palavras-chave:** Equação de Archard; Série de Karhunen-Loeve; Simulação de Monte Carlo.

## PROPOSAL OF PROBABILISTIC FORMULATION FOR ARCHARD'S MODEL

### Abstract

This paper proposes a probabilistic model for the wear of two surfaces in contact. A problem of initial value is formulated from the particularization of Archard's model for the case of contact in line. Based on this problem, two mathematical formulations for the wear model are presented. In the former, the wear coefficient is modeled as a random variable, while in the second this coefficient is modeled as a random field. The Monte Carlo simulation is used to estimate the solutions in terms of the statistical moments of first and second order of the random field 'wear depth'. It was observed an agreement between the covariance functions presented and their estimative obtained through Monte Carlo simulation. For the case where the uncertainty under wear coefficient was modeled by stochastic process it was observed a smaller variance than that observed in case where uncertainty was modeled though random variable.

**Key words:** Archard equation; Karhunen-Loeve series; Monte Carlo simulation.

---

<sup>1</sup> Contribuição técnica apresentada na 61º Congresso Anual da ABM, de 24 a 27 de julho de 2006, Rio de Janeiro – RJ

<sup>2</sup> Engenheiro Mecânico, Prof. Dr. do Departamento Acadêmico de Mecânica da UTFPR.

<sup>3</sup> Engenheiro Metalúrgico, Prof. Dr. do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da UTFPR.

# 1 INTRODUÇÃO

A equação que relaciona taxa de desgaste  $W$  com a dureza do material desgastado foi introduzida pela primeira vez por Holm em 1940. Esta citação pode ser encontrada no artigo de Archard,<sup>(1)</sup> que é tido como a principal referência para o equacionamento da taxa de desgaste em sistemas deslizantes.

O mecanismo assumido por Holm é que há um determinado número de átomos removidos,  $Z$ , pertencentes a uma determinada camada atômica  $\xi$  e a um espaçamento interatômico  $\alpha$ , a cada contato, de área circular, correspondente a um diâmetro  $2a$ , esses fatores estão relacionados por meio da seguinte equação:

$$W = Z \frac{F}{H}, \quad (1)$$

sendo  $F$  e  $H$  a força nominal de contato e a dureza da superfície a ser desgastada, respectivamente. Este equacionamento depende do tipo de deformação assumido para as asperezas em contato, o qual Holm considerou a deformação plástica determinante para a remoção de material, ou seja, possíveis danos causados por contatos elásticos são desconsiderados. A este problema Archard lançou luz, demonstrando que para satisfazer a condição na qual houvesse uma relação linear entre a taxa de desgaste e a força aplicada, alguma hipótese sobre o formato das partículas de desgaste (“debris”) deveria ser feita, o que implica em uma nova compreensão sobre o mecanismo efetivo de remoção de material.

A Tabela 1 abaixo apresenta as relações teóricas demonstradas por Archard, considerando o tipo de deformação e a natureza da deformação no contato mecânico.

**Tabela 1.** Relações teóricas entre a taxa de desgaste  $W$  e a força aplicada  $F$  (1).

Tipo de deformação	Forma da partícula removida	Relação entre $W$ e $F$
Elástico	Camada	$W \propto F^{\frac{3}{2}}$
	Pedaço	$W \propto F^{\frac{3}{2}}$
Plástico	Camada	$W \propto F^{\frac{3}{2}}$
	Pedaço	$W \propto F$

O mecanismo de remoção de partículas foi apresentado no trabalho de Archard e os resultados experimentais da época para sistemas deslizantes confirmaram a relação linear entre a força aplicada e a taxa de desgaste. Especificamente, Archard<sup>(1)</sup> referia-se a um trabalho realizado por Burwell e Strang,<sup>(2)</sup> no qual foi estudado o comportamento de um aço SAE 1095, em duas condições metalúrgicas, equivalentes a durezas Brinell de 223 e 430 HB.

O trabalho de Greenwood and Williansom<sup>(3)</sup> acrescentou, à teoria de Archard a natureza das deformações sob o ponto de vista da distribuição de alturas de asperezas e esse trabalho constitui o marco inicial para a resolução do problema. Independente do conceito que seja atribuído ao coeficiente de desgaste há poucos modelos na literatura para este coeficiente com uma abordagem probabilística.<sup>(4)</sup> Existem muitos trabalhos que propõem uma abordagem probabilística para a rugosidade das superfícies em contato.<sup>(5-7)</sup> Esse problema foi tratado inclusive pelo próprio Archard.<sup>(8)</sup> O presente trabalho pretende dar uma contribuição para a modelagem probabilística do coeficiente de desgaste, para posteriormente haver unificação entre o coeficiente de desgaste e os fatores de rugosidade que expressem a área real de contato.

## 2 MODELO DE ARCHARD

No trabalho de Holm (apud Burwell; Strang<sup>(2)</sup>) a área efetiva de contato é definida por

$$A_e = \frac{F}{p_e}, \quad (2)$$

sendo  $F$  e  $p_e$  a força de contato e a tensão de escoamento do material de menor dureza do par em contato, respectivamente. Esta equação pressupõe que a deformação dos materiais em contato é de natureza plástica. Pelo modelo de desgaste de Archard o volume de desgaste é dado por,

$$V = kAx, \quad (3)$$

sendo  $V$  o volume de desgaste,  $k$  o coeficiente de desgaste e  $x$  a distância de deslizamento. Isolando-se a área  $A_e$  na Eq. (1) e substituindo-se na Eq. (2) obtém-se,

$$V = k \frac{F}{p_e} x. \quad (4)$$

Por outro lado tem-se que o volume de material desgastado pode ser obtido pela seguinte relação

$$V = A_n h, \quad (5)$$

com  $A_n$  e  $h$  a área nominal de contato e uma altura média correspondente à remoção de material, respectivamente. Utilizando-se as identidades definidas nas Eq. (4) e (5) obtém-se

$$h = k \frac{F}{A_n} p_e x \Rightarrow h = k \frac{p_n}{p_e} x, \quad (6)$$

sendo  $p_n$  a pressão nominal. A Eq. (6) mostra que  $h \in C^\infty(\square)$ , isto assegura a existência do seguinte limite

$$\frac{dh}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dh}{dx} = k \frac{p_n}{p_e}. \quad (7)$$

Notando que

$$\frac{p_n}{p_e} = \frac{F}{A_n} \frac{A_e}{F} = \frac{A_e}{A_n}. \quad (8)$$

Chamando-se a razão expressa na Eq. (8)

$$\beta = \frac{p_n}{p_e} = \frac{A_e}{A_n}. \quad (9)$$

Colocando-se a Eq. (9) na Eq. (6)

$$\frac{dh}{dx} = k\beta. \quad (10)$$

Para o coeficiente  $\beta$  propõem-se as seguintes interpretações: 1) ou como a expressão que contempla a propriedade mecânica do material; e 2) ou como a expressão que considera a natureza do contato entre superfícies, que recebeu na literatura tratamento de variável randômica.<sup>(5-7)</sup> A definição desse coeficiente permitirá, em trabalhos futuros, explorar a geometria das asperezas das superfícies em contato. Observando que  $x = x(t)$  e que a velocidade de deslizamento é dada por

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (11)$$

tem-se que  $h = h(x(t))$  e do fato de que  $h \in C^\infty(\square)$  isto possibilita utilizar a regra da cadeia na Eq. (12)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = k\beta v. \quad (12)$$

A Eq. (12) permite formular o problema definido na Eq. (10) como um problema de valor inicial (PVI), sendo definido como,

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k\beta v, & \forall t \in (0, T) \\ h(0) = h_0 \end{cases} \quad (13)$$

Nesse trabalho será explorada a natureza randômica do coeficiente de desgaste. Originalmente no trabalho de Archard,<sup>(1)</sup> o coeficiente de desgaste foi considerado como um fator de probabilidade. As variáveis velocidade e pressão de contato para o problema apresentado na Eq. (13) serão consideradas constantes. Nesse trabalho serão estudados dois casos para a modelagem da incerteza presente no coeficiente de desgaste: variável randômica e campo randômico.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DESGASTE PROBABILÍSTICO

Nesta seção são apresentadas duas descrições probabilísticas para o coeficiente de desgaste da equação de Archard. Estas descrições originam duas formulações matemáticas para o modelo de desgaste. Na primeira o coeficiente de desgaste é modelado como uma variável randômica, enquanto na segunda este coeficiente é modelado por um processo estocástico.

#### 3.1 Coeficiente de Desgaste como Variável Randômica

O modelo de variável randômica para o coeficiente de desgaste é definido como,

$$k(\theta) = k_0 + \sigma_k \xi(\theta), \quad (14)$$

sendo  $k_0$ ,  $\sigma_k$  e  $\xi(\theta)$  o valor esperado e desvio padrão do coeficiente de desgaste e uma variável randômica gaussiana, respectivamente. Esta variável randômica possui as seguintes estatísticas:

$$E_\xi = \langle \xi \rangle = 0 \quad \text{e} \quad V_\xi = \langle (\xi - E_\xi)^2 \rangle = 1. \quad (15)$$

sendo que

$$\langle \xi \rangle = \int_{\Theta} \xi f_\xi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

com  $\Theta$  o espaço amostral. Substituindo-se a Eq. (14) na Eq. (13) obtém-se

$$\frac{dh}{dt} = k_0\beta v + \sigma_k \xi \beta v. \quad (17)$$

Integrando-se a Eq. (17) sobre o intervalo  $[0, t] \subset [0, T]$  e aplicando-se as condições iniciais do problema definido na Eq. (13),

$$h(t) = h_0 + k_0\beta vt + \sigma_k \xi \beta vt. \quad (18)$$

Na Eq. (18) aplica-se o operador de valor esperado definido na Eq. (16) para obter o valor esperado da altura de desgaste,

$$E_h(t) = \langle h(t) \rangle \Rightarrow E_h(t) = h_0 + k_0\beta vt. \quad (19)$$

A função covariância da variável randômica “altura de desgaste” é dada por:

$$C_h(s,t) = \langle h(s), h(t) \rangle - \langle h(s) \rangle \langle h(t) \rangle \Rightarrow C_h(s,t) = (\sigma_k \nu \beta)^2 st, \quad \forall (s,t) \in [0,T] \times [0,T]. \quad (20)$$

Para obter a variância da “altura de desgaste”, avalia-se a função covariância definida na Eq. (20) em  $s = t$ ,

$$V_h(t) = (\sigma_k \nu \beta)^2 t^2. \quad (21)$$

É importante ressaltar que a aplicação do modelo de Archard tem sua validade para o regime estacionário de desgaste. Portanto, será considerado que a altura inicial é tomada para um tempo superior ao tempo de amaciamento.

### 3.2 Coeficiente de Desgaste como Processo Estocástico

No problema em que a incerteza sobre o coeficiente de desgaste é modelada por um processo estocástico, torna-se necessário utilizar a série de Karhunen-Loeve (KL) para representar o processo estocástico “coeficiente de desgaste”. Para utilizar a série KL assume-se que o processo estocástico “coeficiente de desgaste” seja de segunda ordem. A série KL para o coeficiente de desgaste é definida por

$$k(t, \theta) = k_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(t) \xi_i(\theta), \quad (22)$$

sendo  $\xi$ ,  $\lambda$  e  $\varphi$ , variáveis randômicas ortonormais, os autovalores e as autofunções, respectivamente, e  $k_0$  a função valor esperado do coeficiente de desgaste. Os autovalores e as autofunções utilizados na série KL são provenientes do problema de autovalores definido por

$$\int_0^T C_k(s,t) \bar{\varphi}_i(s) ds = \lambda_i \varphi_i(t), \quad \forall t \in [0,T]. \quad (23)$$

Uma desvantagem da série KL é a necessidade da solução do problema de autovalores expresso na Eq. (23). Para alguns tipos de funções de covariância existem métodos analíticos para determinação dos autovalores e das autofunções. Para problemas em que não são conhecidos os autovalores e as autofunções, Ghanem e Spanos<sup>(9)</sup> propuseram a utilização do método de Galerkin. Neste trabalho são conhecidos os autovalores e as autofunções.

A série KL definida na Eq. (23) será truncada no  $M$ -ésimo termo para se obter soluções numéricas para o processo estocástico “altura de desgaste”. Colocando-se a série KL no PVI definido em (13), obtém-se

$$\frac{dh_M}{dt} = k_0 \beta \nu + \beta \nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(t) \xi_i(\theta). \quad (24)$$

Integrando-se a Eq. (24) no intervalo  $[0,t] \subset [0,T]$

$$h_M(t, \theta) = h_0 + k_0 \beta \nu t + \beta \nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \Gamma_i(t), \quad (25)$$

com  $\Gamma_i(t) = \int_0^t \varphi_i(x) dx$ . Para obter o valor esperado do processo estocástico “altura de desgaste” basta aplicar o operador de valor esperado na Eq. (25),

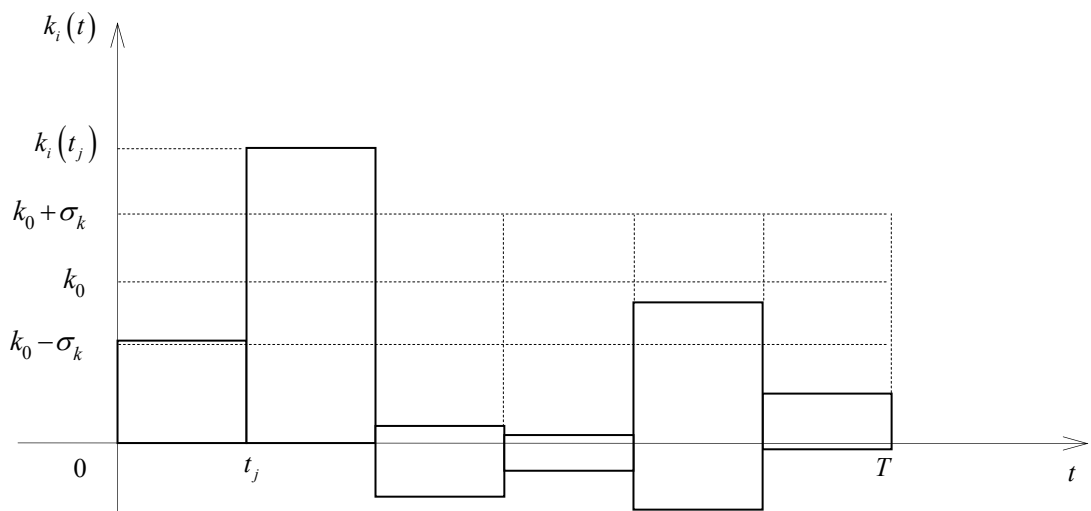
$$E_{h_M}(t) = h_0 + k_0 \beta \nu t, \quad \forall t \in [0,T]. \quad (26)$$

As funções covariância e variância do processo estocástico “altura de desgaste” são dadas por

$$C_{h_M}(s,t) = (\beta \nu)^2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \Gamma_i(s) \Gamma_i(t), \quad V_{h_M}(t) = (\beta \nu)^2 \sum_{i=1}^M \lambda_i \Gamma_i^2(t). \quad (27)$$

#### 4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A simulação de Monte Carlo é utilizada para obter os momentos estatísticos do processo estocástico de altura de desgaste e compará-los com aqueles obtidos através das formulações apresentadas na seção 3. Para o caso em que o coeficiente de desgaste é modelado por um processo estocástico utiliza-se o método do ponto centroidal para discretizar a incerteza. No método do ponto centroidal faz-se uma partição em sub-regiões do domínio do problema. Para cada uma dessas sub-regiões é gerado randomicamente um valor numérico para o coeficiente de desgaste. Esse valor é obtido através de um gerador de números aleatórios, a partir dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem e da função densidade de probabilidade do processo estocástico “coeficiente de desgaste”. Desta forma, uma amostra do processo estocástico “coeficiente de desgaste” corresponde a um conjunto de valores gerados aleatoriamente, conforme é mostrado na Figura 1.



**Figura 1.** Discretização da  $i$ -ésima amostra do processo estocástico coeficiente de desgaste pelo método do ponto centroidal.

Uma realização do processo estocástico “altura de desgaste” corresponde à solução do problema definido na Eq. (13). Desta forma, a  $i$ -ésima realização da altura de desgaste é obtida por

$$h_i(t) = h_0 + k_{ij}\beta vt, \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall j \in \{1, \dots, N_S\}.$$

sendo  $N_S \in \mathbb{N}$  o número de simulações. A estimativa do valor esperado da variável randômica “altura de desgaste” no instante  $t$  é obtida fazendo-se a média amostral a partir do conjunto das realizações do processo estocástico “altura de desgaste” no instante  $t$

$$E_h(t) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} h_i(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (28)$$

A estimativa da variância do processo estocástico “altura de desgaste” no instante  $t$  é dada por

$$V_h(t) = \frac{1}{N_S - 1} \sum_{i=1}^{N_S} [h_i(t) - E_h(t)]^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (29)$$

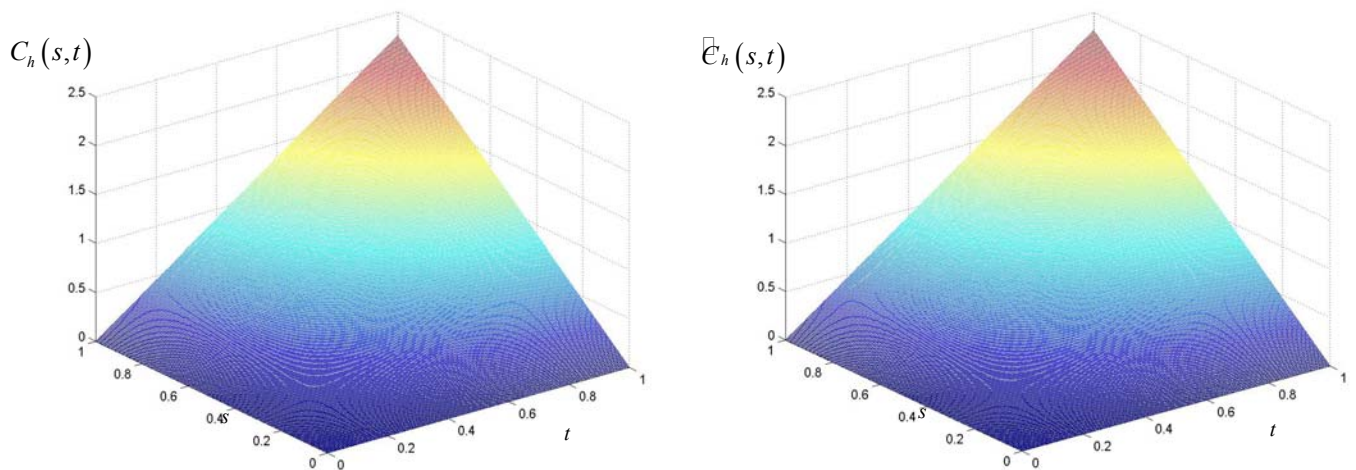
É importante mencionar que a função covariância do processo estocástico “altura de desgaste” é estimada através de simulação de Monte Carlo para os problemas numéricos que serão apresentados na próxima seção.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são resolvidos dois problemas utilizando a equação de Archard para dois casos de modelagem da incerteza, utilizando as metodologias apresentadas na seção 3. A partir disso, é obtido o momento estatístico de segunda ordem do processo estocástico “altura de desgaste”. A simulação de Monte Carlo é utilizada para avaliar os momentos estatísticos obtidos pelos métodos apresentados nesse trabalho. Para esses problemas utiliza-se  $\nu=1$  e  $\beta=15\times 10^{-2}$ ,<sup>(10)</sup> com tempo de deslizamento  $T=1$ .

### Problema 1: Coeficiente de desgaste modelado por variável randômica.

Neste problema a incerteza sobre o coeficiente de desgaste é modelada por uma variável randômica gaussiana com  $k_0=10^{-3}$  (2) e  $\sigma_k=10^{-4}$ .

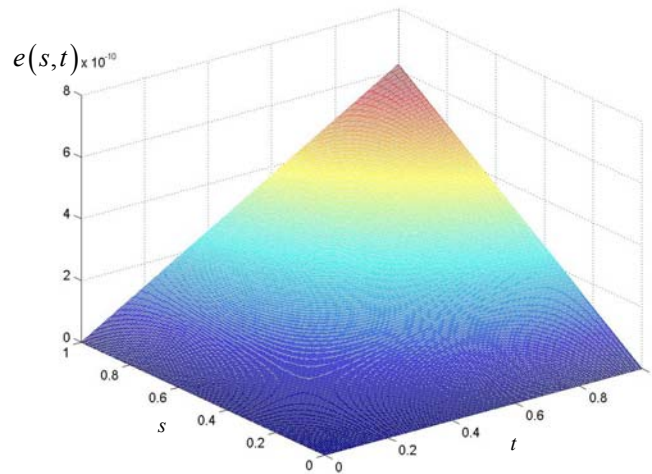


**Figura 2.** a) Função covariância, definida na Eq. (20); b) Estimativa da função covariância via simulação de Monte Carlo.

Nas Figuras 2a e 2b estão os gráficos das funções covariância obtidas pela Eq. (20) e por simulação de Monte Carlo, respectivamente. Pode-se observar uma boa aproximação da função covariância definida na Eq. (20) com a obtida pela simulação de Monte Carlo. Para avaliar a aproximação da função covariância dada pela Eq. (20) e a função covariância obtida por simulação de Monte Carlo define-se a função erro absoluto como

$$e(s,t) = \left| C_h(s,t) - \hat{C}_h(s,t) \right|, \quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Na Figura 3 está apresentado o gráfico da função erro absoluto. Pode-se observar que a boa aproximação entre as funções covariância dada pela Eq. (20) e a estimativa da função covariância obtida por simulação de Monte Carlo.

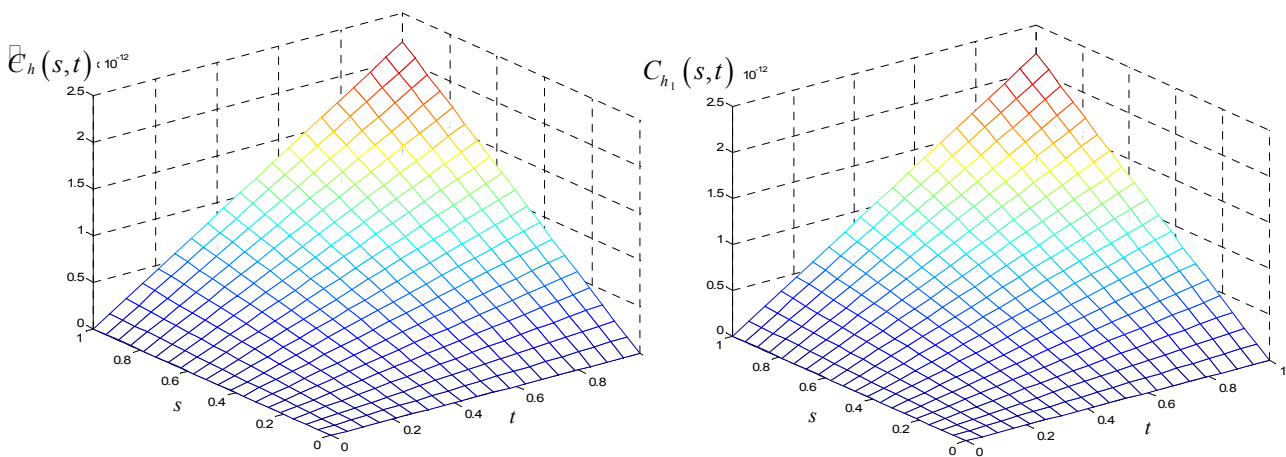


**Figura 3.** Função erro absoluto.

Para esse caso de modelagem da incerteza a estimativa da função covariância obtida por Monte Carlo utilizou uma amostra com  $N_S = 2500$ .

**Problema 2: Coeficiente de desgaste modelado por campo randômico.**

Neste problema a incerteza sobre o coeficiente de desgaste é modelado por um processo estocástico gaussiano com momentos estatísticos  $E_k(t) = 10^{-3}, \forall t \in [0,1]$  e  $C_k(s,t) = 10^{-8} e^{-\frac{|s-t|}{100}}, \forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ . As estimativas para as funções variância e covariância realizadas através de simulação de Monte Carlo foram obtidas com duas mil amostras ( $N_S = 2000$ ) para representar a variabilidade presente no campo randômico “coeficiente de desgaste”.



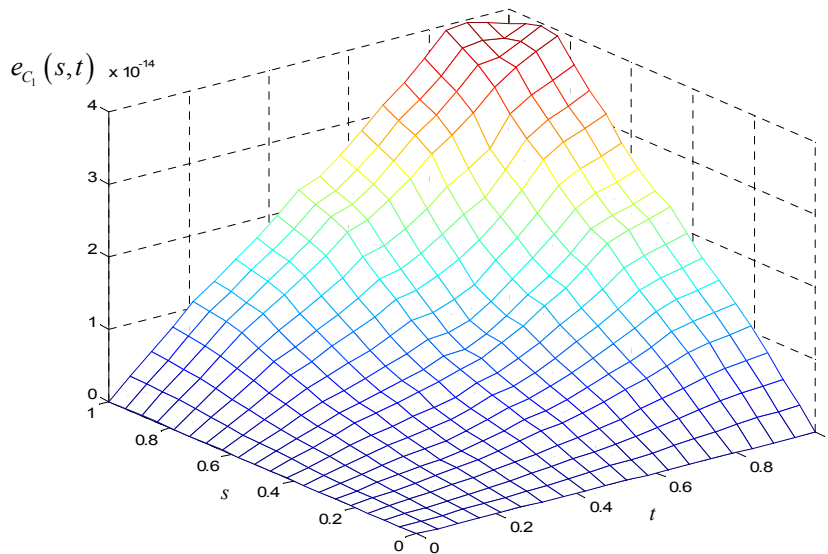
**Figura 4.** a) Função covariância, definida na Eq. (21); b) Estimativa da função covariância via simulação de Monte Carlo.

As Figuras 4a e 4b representam os gráficos da aproximação da função covariância definida na Eq. (27) e da estimativa da função covariância obtida por simulação de Monte Carlo, respectivamente. Para avaliar a aproximação entre a função covariância definida na Eq. (27) e a estimativa da covariância obtida por simulação de Monte Carlo torna-se necessário definir a função erro absoluto em covariância,

$$e_{C_1}(s,t) = \left| C_{h_1}(s,t) - \bar{C}_h(s,t) \right|, \quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$



Na Figura 5 apresenta-se o gráfico da função erro absoluto em covariância. Pode-se observar a aproximação entre a função covariância dada pela Eq. (27) e a estimativa da função covariância obtida por simulação de Monte Carlo.

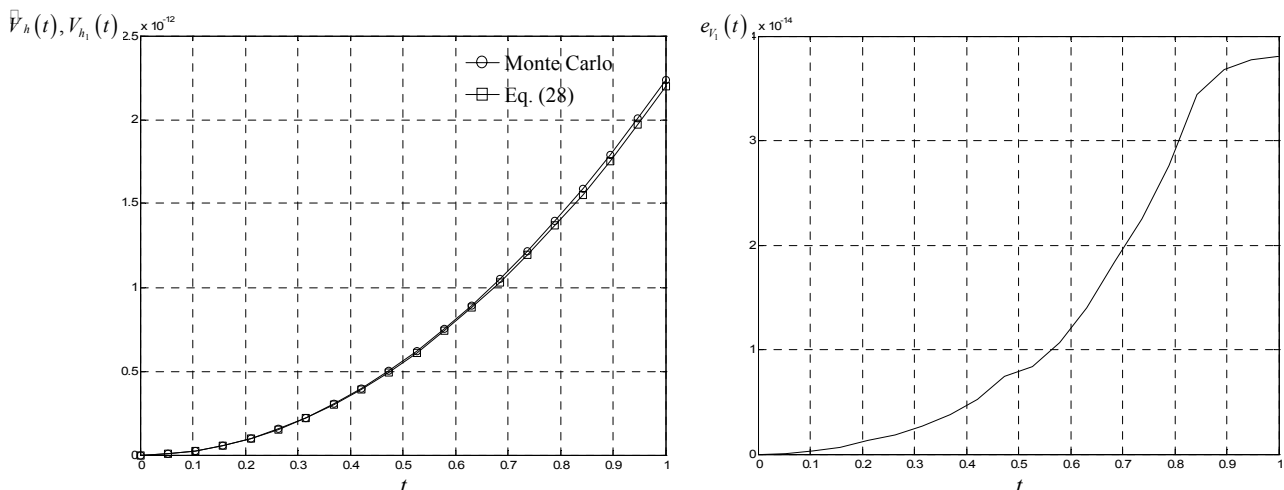


**Figura 5.** Função erro absoluto em covariância.

Para avaliar a aproximação entre a função variância expressa na Eq. (28) e a estimativa da função variância obtida por Monte Carlo, Eq. (29), define-se a função erro absoluto em variância,

$$e_{V_1}(t) = \left| \bar{V}_h(t) - V_{h_1}(t) \right|, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Na Figuras 6a e 6b estão apresentados os gráficos da função variância definida na Eq. (28) e a estimativa da função variância obtida por simulação de Monte Carlo, respectivamente.



**Figura 6.** a) Função variância, definida na Eq. (28) e estimativa de função variância por simulação de Monte Carlo, Eq. (29); b) Função erro absoluto em variância.

Na Figura 6a pode-se avaliar a aproximação entre a função variâncias definidas nas Eq. (28) e (29). No gráfico apresentado na Figura 6b pode-se ver que o erro absoluto em variância aumenta à medida que aumenta o tempo de deslizamento.

Nos problemas apresentados nesta seção a modelagem da incerteza através de variável randômica conduziu a um erro absoluto em covariância menor. Isto pode ser

observado através da comparação entre os gráficos apresentados nas Figuras 2 e 4. É importante mencionar que a modelagem da incerteza sobre o coeficiente de desgaste através de variável ou campo randômico dependerá do conjunto de informações que se tem disponível para esta escolha, como por exemplo, momentos de primeira e segunda ordem.

## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta uma abordagem probabilística para o coeficiente de desgaste presente no modelo de Archard. Neste modelo tal coeficiente é interpretado como um conteúdo de probabilidade associado ao evento “contato entre asperezas”. Essa caracterização permite tratar a altura de desgaste como um processo estocástico. Neste trabalho a modelagem da incerteza sobre o coeficiente de desgaste através de variável randômica e processo estocástico originou duas formulações probabilísticas. Na descrição através de variável randômica os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem foram determinados exatamente. Na abordagem através de processo estocástico, os momentos estatísticos foram obtidos de forma aproximada. Em ambos os casos, os resultados dos problemas numéricos propostos foram satisfatórios. Em termos quantitativos, pode-se observar a concordância entre as funções covariância definidas nas Eq. (20) e (27) e as suas estimativas obtidas através da simulação de Monte Carlo. Para o caso em que a incerteza sobre o coeficiente de desgaste foi modelada por processo estocástico observou-se uma variância menor do que a observada no caso em que a incerteza foi modelada através de variável randômica.

## REFERÊNCIAS

- 1 ARCHARD, J. F. Contact and Rubbing of Flat Surfaces, **Journal of Applied Physics**, v. 24, n. 8, p. 981–988. 1953.
- 2 BURWELL, J. T., STRANG, C. D. On the Empirical Law of Adhesive Wear, **Journal of Applied Physics**, v. 23, n. 1, p. 18-28. 1952.
- 3 GREENWOOD, J. A., WILLIAMSON, J. B. P. Contact of nominally flat surfaces, **Proc. R. Soc. London**, Ser. A, 295, p. 300 - 319. 1966.
- 4 CHEVALIER, L., CLOUPET, S., SOIZE, C. Probabilistic model for random uncertainties in steady state rolling contact, **Wear** v. 258, p.1543–1554, 2005.
- 5 MYSHKIN, N.K., CHIZHIK, S. A., GORBUNOV, V. V. Nanoscale topography and tribological problems, **Tribology International** Vol. 28, No. 1, p. 39-43, 1995.
- 6 MYSHKIN, N.K., PETROKOVETS, M. I., CHIZHIK, S. A. Simulation of real contact in tribology, **Tribology International**, V. 31, Nos 1–3, p. 79–86, 1998.
- 7 MYSHKIN, N.K., GRIGORIEV, A.Y., CHIZHIK, S.A., CHOI, K.Y., PETROKOVETS, M.I. Surface roughness and texture analysis in microscale, **Wear**, v. 254, p. 1001–1009, 2003.
- 8 ONIONS, R.A., ARCHARD, J.F. The contact of surfaces having a random structure, **J. Phys. D: Appl. Phys.**, V. 6, p. 289-304. 1973.
- 9 SPANOS, P. D.; GHANEM, R. Stochastic finite element expansion for media random, **Journal Engineering Mechanics**, v. 125, n. 1, p. 26-40, 1989.
- 10 MCCOOL, J.L. Comparison of models for the contact of rough surfaces, **Wear**, v. 107, p. 37 – 60, 1986