



# UM ALGORITMO APRIMORADO DE RAINFLOW MULTIAXIAL PARA CALCULAR DANO À FADIGA SOB CARGAS NÃO PROPORCIONAIS<sup>1</sup>

Marco Antonio Meggiolaro<sup>2</sup>  
Jaime Tupiassú Pinho de Castro<sup>2</sup>

## Resumo

Dano à fadiga sob cargas multiaxiais não-proporcionais pode ocorrer quando as tensões principais mudam de direção durante a história do carregamento. Técnicas de rainflow uniaxial não podem ser usadas neste caso. O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo simples de rainflow multiaxial para calcular apropriadamente o dano à fadiga em histórias não-proporcionais. Dois enfoques são normalmente seguidos para o cálculo do dano sob cargas multiaxiais. O primeiro é baseado em um método de planos críticos, onde vários planos-candidatos são estudados até encontrar aquele que sofre o maior dano. Esse método não é eficiente para histórias longas. O segundo método consiste em usar um algoritmo verdadeiramente multiaxial, como o algoritmo de Wang-Brown (WB). Este algoritmo, no entanto, possui algumas idiosincrasias que podem levar a previsões não-conservativas, erroneamente filtrando eventos significativos dentro de um ciclo multiaxial. Um algoritmo aprimorado de WB é proposto.

**Palavras chave:** Fadiga multiaxial; Carregamento não-proporcional; Rainflow multiaxial; Algoritmo de Wang-Brown.

## AN IMPROVED NON-PROPORTIONAL MULTIAXIAL RAINFLOW ALGORITHM TO CALCULATE FATIGUE DAMAGE

### Abstract

Non-proportional multiaxial fatigue damage may occur when the principal stress directions vary during the loading history. Uniaxial rainflow counting techniques cannot be reliably applied in this case. The objective of this work is to develop a simple multiaxial rainflow algorithm that allows the proper calculation of multiaxial damage in non-proportional histories. Two approaches can be followed to perform a multiaxial damage calculation. The first is based on a critical plane approach, where several candidate planes must be studied to find the one that experiences the highest damage. This method is not efficient for very large loading histories. The second approach is to use a truly multiaxial rainflow algorithm, such as Wang-Brown's (WB) algorithm. Such algorithm, however, has a few idiosyncrasies that can lead to non-conservative predictions, incorrectly filtering out significant events within a multiaxial loading cycle. An improved WB algorithm is proposed.

**Key words:** Multiaxial fatigue; Non-proportional loading; Multiaxial rainflow; Wang-Brown algorithm.

<sup>1</sup> Contribuição técnica ao 65º Congresso Anual da ABM, 26 a 30 de julho de 2010, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup> Engenheiro Mecânico, Ph.D., Professor Dept. Eng. Mecânica, PUC-Rio



## 1 INTRODUÇÃO

A contagem *rainflow* tradicional *não* quantifica os eventos das histórias de carga não proporcionais (NP) de amplitude variável, já que nelas os picos e vales de  $\varepsilon$  e de  $\gamma$  em geral *não* coincidem, e geram laços de histerese elastoplástica que não são facilmente identificáveis.

Uma solução para este problema é projetar as tensões e deformações normais em planos que passam por todas as direções no ponto crítico, para estudá-los separadamente.<sup>(1)</sup> Na prática, é possível discretizar os planos que passam pelo ponto crítico de  $10^\circ$  em  $10^\circ$ , gerando 18 planos-candidatos.<sup>(2,3)</sup> Como o ponto crítico da peça está em geral na superfície da peça (logo sob  $\sigma_z = 0$ ), nestes casos a procura do plano crítico fica resumida a duas famílias de planos-candidatos: 18 planos perpendiculares à superfície, e 18 planos que fazem um ângulo de  $45^\circ$  com a superfície. A procura do plano crítico se restringe assim a  $18 + 18 = 36$  planos-candidatos. Aplicando o *rainflow* uniaxial a cada história destes laços projetados, pode-se achar o plano crítico onde a história da carga causa o maior dano à fadiga.

Mas nas histórias NP, os laços  $\sigma\varepsilon$  projetados num plano podem violar todas as regras tradicionais usadas para traçar laços uniaxiais: os laços pequenos podem estar fora do maior laço da história, e a deformação máxima  $\varepsilon_{\max}$  pode não coincidir com a maior tensão  $\sigma_{\max}$  atingida durante a história da carga. Devido à complexidade adicional nada desprezível associada aos laços gerados pelas histórias não proporcionais, fica claro que para aplicar a contagem *rainflow* a laços NP devem-se incorporar novas regras de memória para compatibilizar os picos de  $\sigma$  e de  $\varepsilon$ . Alguns algoritmos conseguem lidar com as particularidades acima mencionadas para avaliar histórias projetadas em planos candidatos. No entanto, estes algoritmos não são computacionalmente eficientes para histórias muito longas, porque a contagem precisa ser refeita para cada um dos planos-candidatos, ou seja, tipicamente 36 vezes, a cada evento da carga.

Outros algoritmos de *rainflow* multiaxial fazem a contagem na história original, antes de ela ser projetada nos planos-candidatos. A vantagem é que o algoritmo só precisa ser aplicado uma vez a uma dada história, permitindo que as projeções nos planos-candidatos sejam feitas após a contagem, utilizando seu resultado. Porém, este tipo de algoritmo de contagem precisa se basear em algum parâmetro invariante à direção, e.g. tensões ou deformações de Mises, para que seu resultado possa ser aplicado à projeção da história original em qualquer plano-candidato.

## 2 ALGORITMO DE WANG-BROWN

Wang e Brown<sup>(4)</sup> propuseram uma interessante generalização multiaxial da contagem *rainflow* que é aplicável a qualquer história de tensão ou de deformação proporcional ou NP, e que só precisa ser computada uma única vez (i.e., não precisa ser repetida para todo e cada plano onde os laços são projetados). O *rainflow* multiaxial é baseado na deformação de Mises, obtida usando o coeficiente de Poisson médio ou efetivo  $\bar{\nu} = (0.5\varepsilon_{pl} + \nu_{el}\varepsilon_{el}) / (\varepsilon_{pl} + \varepsilon_{el})$  para considerar os efeitos plásticos, onde  $\varepsilon_{el}$  e  $\varepsilon_{pl}$  são as partes elástica e plástica das deformações máximas:

$$\varepsilon_{\text{Mises}} = \frac{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 1.5(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}}{\sqrt{2(1 + \bar{\nu})}}$$



O grande problema de  $\epsilon_{Mises}$  é a perda do sinal do carregamento, pois os valores de Mises são sempre positivos. Por isso, histórias cíclicas 90° fora de fase podem até gerar  $\epsilon_{Mises}$  constante (logo, uma previsão *não* conservativa de vida infinita), apesar das reversões que podem causar dano à fadiga. Para contornar esta limitação, utiliza-se a deformação relativa de Mises  $\epsilon_{RMises}$ , que é calculada subtraindo da história inteira todas as componentes de deformação  $\epsilon_{ij}$  do ponto inicial de contagem. Portanto, as deformações relativas precisam ser recalculadas para todo e cada passo da contagem ao longo da história. Mas a deformação relativa  $\epsilon_{RMises}$  só é usada para localizar os pontos inicial e final de cada contagem, após a qual se pode aplicar nestes pontos qualquer modelo de dano multiaxial (mesmo os que não incluem  $\epsilon_{Mises}$ ), através das componentes de  $\sigma$  e de  $\epsilon$  nos trechos obtidos<sup>(5-8)</sup>.

Como no caso uniaxial, o *rainflow* multiaxial é composto por apenas 3 regras: a contagem deve ser iniciada no ponto que possuir o maior valor de  $\epsilon_{Mises}$  absoluto; cada contagem deve ser iniciada em seqüência de todo e cada pico ou vale de qualquer uma das componentes de deformação, e a deformação relativa de Mises,  $\epsilon_{RMises}$ , deve ser computada em relação a cada ponto inicial; e o ponto final de cada contagem é obtido ao atingir o maior valor de  $\epsilon_{RMises}$  da história ou qualquer trecho de uma contagem anterior. Ao final deste processo, todos os trechos da história original são contados uma única vez, sendo possível reconhecer os grandes ciclos nela embutidos. O *rainflow* multiaxial só precisa ser feito uma vez, pois ele será aplicável para qualquer plano de projeção de  $\sigma$  e  $\epsilon$ .

A Figura 1 exemplifica o uso do algoritmo de Wang-Brown em uma história NP cíclica de tração-torção formada por blocos sucessivos de deformação normal e cisalhante dadas por  $(\epsilon_x, \gamma_{xy}) = \{(2, 1) \rightarrow (-1, 2) \rightarrow (2, -2) \rightarrow (-2, -2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (-2, 0)\}\%$ , aplicados repetidamente em uma peça.<sup>(3)</sup>

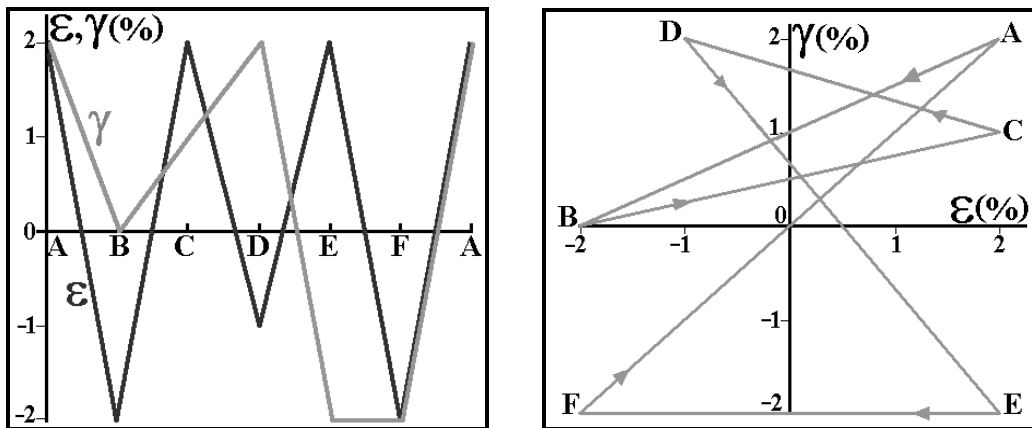


Figura 1. Sequência de eventos da carga NP, e mapa  $\gamma\epsilon$  correspondente.

A contagem *rainflow* multiaxial resulta nas amplitudes e médias de  $\epsilon$  e  $\gamma$  mostradas na Figura 2, correspondentes aos trechos A-B-B'-F, B-C-C'-E-A, C-D-D'-B', D-C', E-D' e F-A.

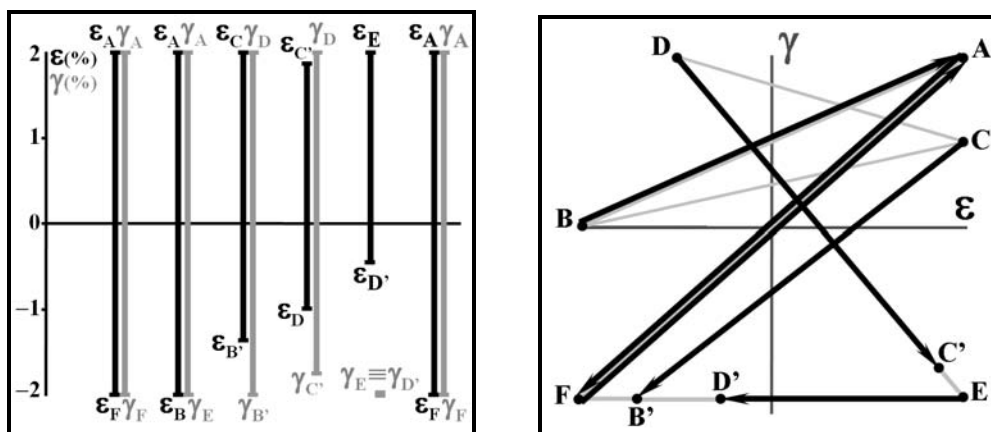


Figura 2. Resultado da contagem *rainflow*, e diagrama  $\gamma\epsilon$  dos eventos contados.

Os modelos de dano à fadiga gerado por deformações multiaxiais, e.g. Brown-Miller,<sup>(5)</sup> Fatemi-Socie<sup>(6)</sup> ou Smith-Watson-Topper<sup>(2)</sup> (SWT) podem ser aplicados nestas componentes. Note que modelos lineares elásticos de Sines e de Findley não são aplicáveis neste caso, pois  $\epsilon_a$  e/ou  $\gamma_a \geq 2\%$  causam escoamento em todas as ligas estruturais metálicas; além disso, Sines não vale em histórias NP.

### 3 ALGORITMO DE WANG-BROWN MODIFICADO

Não é muito difícil aplicar o algoritmo original de Wang e Brown em histórias de tração/flexão uniaxial combinada com torção, que podem ser representadas apenas por uma tensão normal  $\sigma_x$  e uma cisalhante  $\tau_{xy}$  (ou por uma deformação normal  $\epsilon$  e uma cisalhante  $\gamma$ ). Neste caso, o espaço de componentes normais e cisalhantes é plano (possui apenas 2 dimensões), e a única dificuldade se dá no cálculo e resolução das equações das elipses associadas ao lugar geométrico de tensões (ou deformações) relativas de Mises constantes.<sup>(3)</sup>

No entanto, se  $\sigma_y$  for diferente de zero e independente de  $\sigma_x$ , caso geral das histórias de tensão atuantes na superfície de uma peça cuja normal esteja na direção z, o espaço das componentes normais e cisalhantes é tridimensional. Nestes casos, o lugar geométrico de tensões (ou deformações) relativas de Mises constantes é elipsoidal, aumentando bastante a complexidade computacional do algoritmo. O problema se torna ainda mais complexo caso haja uma componente  $\sigma_z$  diferente de zero na história, causada e.g. por um estado de deformação plana.

Para simplificar a automação deste algoritmo, sugere-se fazer uma mudança de variáveis nas histórias de tensões numa superfície xy através das transformações

$$\sigma_x' \equiv \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} (1 - 2\alpha' \bar{v}), \quad \sigma_y' \equiv \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{3}, \quad \tau_{xy}' \equiv \tau_{xy} \sqrt{3}$$

Estas transformações resultam num espaço Euclidiano reduzido, similar ao proposto por Papadopoulos et al.<sup>(9)</sup> Nas equações acima, assume-se que as tensões e deformações cisalhantes nos planos xz e yz são nulas, e que a tensão  $\sigma_z$  (normal à superfície) pode ser escrita em função de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  por  $\sigma_z \equiv \alpha' \cdot \bar{v} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$ , onde  $\alpha' = 0$  para tensão plana e  $\alpha' = 1$  para deformação plana. Estas 3 variáveis, quando representadas num diagrama tridimensional  $\sigma_x' \times \sigma_y' \times \tau_{xy}'$ , denominado aqui Espaço Euclidiano Reduzido (EER), possuem algumas propriedades interessantes:

1) o módulo do vetor  $(\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}')$  é igual à tensão equivalente de Mises, pois



$$\sqrt{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \tau_{xy}'^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z + \sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_{\text{Mises}}$$

2) a distância Euclideana entre 2 pontos  $(\sigma_{x1}', \sigma_{y1}', \tau_{xy1}')$  e  $(\sigma_{x2}', \sigma_{y2}', \tau_{xy2}')$  é igual à tensão relativa de Mises  $\sigma_{\text{RMises}}$  entre eles, pois

$$\sigma_{\text{RMises}}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_{x1} - \sigma_{x2}) - (\sigma_{y1} - \sigma_{y2})]^2 + \frac{1}{2}[(\sigma_{x1} - \sigma_{x2}) - (\sigma_{z1} - \sigma_{z2})]^2 +$$

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{y1} - \sigma_{y2}) - (\sigma_{z1} - \sigma_{z2})]^2 + 3(\tau_{xy1} - \tau_{xy2})^2$$

3) o lugar geométrico dos pontos que possuem o mesmo  $\sigma_{\text{RMises}}$  em relação a um ponto  $(\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}')$  é a superfície de uma esfera no EER com centro neste ponto e raio  $\sigma_{\text{RMises}}$ .

As propriedades acima são convenientes para tratar histórias multiaxiais de tensão. Analogamente, é possível definir um EER para as deformação de Mises, com propriedades similares. Para isso, é preciso somar e subtrair as expressões de  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  da lei de Hooke, obtendo

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y)}{1 - \bar{\nu} - 2\alpha'\bar{\nu}^2}, \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{E \cdot (\epsilon_x - \epsilon_y)}{1 + \bar{\nu}}, \quad \epsilon_z = -\frac{\bar{\nu}(1 - \alpha')(\epsilon_x + \epsilon_y)}{1 - \bar{\nu} - 2\alpha'\bar{\nu}^2}$$

Substituindo as expressões acima, obtém-se uma mudança de variáveis similar para uma história de deformações, através das transformações lineares

$$\epsilon_x' \equiv \frac{\sigma_x'}{E} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \frac{1 - 2\alpha'\bar{\nu}}{1 - \bar{\nu} - 2\alpha'\bar{\nu}^2}, \quad \epsilon_y' \equiv \frac{\sigma_y'}{E} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2(1 + \bar{\nu})} \sqrt{3}, \quad \gamma_{xy}' \equiv \frac{\tau_{xy}'}{E} = \frac{\gamma_{xy}}{2(1 + \bar{\nu})} \sqrt{3}$$

O EER de deformação de Mises  $\epsilon_x' \times \epsilon_y' \times \gamma_{xy}'$  também possui as 3 propriedades descritas acima, pois

$$\sqrt{\epsilon_x'^2 + \epsilon_y'^2 + \gamma_{xy}'^2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \frac{1 - 2\alpha'\bar{\nu}}{1 - \bar{\nu} - 2\alpha'\bar{\nu}^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2(1 + \bar{\nu})}\right)^2 + 3\left(\frac{\gamma_{xy}}{2(1 + \bar{\nu})}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(1 + \bar{\nu})}} \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 \left(\frac{(1 + \bar{\nu})(1 - 2\alpha'\bar{\nu})}{1 - \bar{\nu} - 2\alpha'\bar{\nu}^2}\right)^2 + 1.5(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 1.5\gamma_{xy}^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(1 + \bar{\nu})}} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + 1.5\gamma_{xy}^2} = \epsilon_{\text{Mises}} = \frac{\sigma_{\text{Mises}}}{E}$$

Desse modo, representando a história de picos e vales no espaço de deformação de Mises por pontos  $P_i = (\epsilon_{xi}', \epsilon_{yi}', \gamma_{xyi}')$ , ou de tensão por  $P_i = (\sigma_{xi}', \sigma_{yi}', \tau_{xyi}')$ , as 3 regras



do *rainflow* multiaxial de Wang e Brown ficam bem mais fáceis de serem computadas e interpretadas geometricamente:

- 1) A contagem deve ser iniciada no ponto que possuir o maior módulo, i.e., a maior distância Euclidiana até a origem do diagrama. Este ponto é denominado  $P_1$ , e os subsequentes são denominados  $P_2, \dots, P_n$ , na mesma seqüência da história original.
- 2) Cada contagem deve ser iniciada em seqüência de todo e cada ponto  $P_i$  do diagrama.
- 3) O ponto final de cada contagem é obtido ao atingir:
  - a) o ponto  $P_j$  mais distante do ponto inicial (com  $j > i$ ), ou
  - b) qualquer trecho de uma contagem anterior.

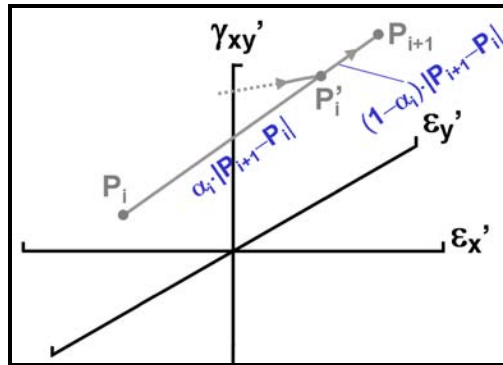
A primeira regra de Wang e Brown foi concebida para tentar garantir que a maior  $\varepsilon_{RMises}$  (ou a maior  $\sigma_{RMises}$ ) da história seja identificada, um dos objetivos principais de uma contagem *rainflow*. No entanto, se esse ponto  $P_1$  de maior módulo não for um dos dois pontos do diagrama com maior distância entre si, a regra acima falha.

Isto é fácil verificar analisando, e.g., uma história cíclica que, após as transformações de variáveis descrita acima, resulte em  $\varepsilon_y' = 0$  e em blocos consecutivos com  $(\varepsilon_x', \gamma_{xy}') = \{(0.8, 0) \rightarrow (0, -0.5) \rightarrow (0, 0.6)\}\%$ . Pela regra original de Wang e Brown, o ponto de maior  $\varepsilon_{RMises}$  é  $P_1 = (0.8, 0)\%$ , com  $\varepsilon_{RMises} = 0.8\%$ , e os pontos seguintes são denominados  $P_2$  e  $P_3$ . A contagem *rainflow* desta carga resultaria então nos trechos  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ , com  $\varepsilon_{RMises} = |P_3 - P_1| = [(0 - 0.8)^2 + (0.6 - 0)^2]^{0.5} = 1.0\%$ , e  $P_3$ - $P_1$ , com  $\varepsilon_{RMises} = |P_1 - P_3| = 1.0\%$ . Não houve contagem iniciada em  $P_2$  porque todo o trecho  $P_2$ - $P_3$  foi incluído em  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ , mas nota-se que  $P_2$ - $P_3$  estaria associado a uma  $\varepsilon_{RMises} = |0.6 - (-0.5)| = 1.1\%$ , valor este que não foi contabilizado. Em geral, não é difícil provar que a maior deformação (ou tensão) relativa de Mises da história pode ser *subestimada* pelo algoritmo original de Wang-Brown em até  $1 - \sqrt{2}/2 = 29.3\%$ .

Assim, propõe-se que a primeira regra listada seja modificada, identificando-se no diagrama o par de pontos com maior distância relativa, e denominando  $P_1$  o ponto deste par que possuir a maior distância à origem. Com essa nova regra, os pontos no exemplo acima passariam a ser  $P_1 = (0, 0.6)$ ,  $P_2 = (0.8, 0)$  e  $P_3 = (0, -0.5)\%$ , e a contagem resultaria nos trechos  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ , com  $\varepsilon_{RMises} = |P_3 - P_1| = 1.1\%$ , e  $P_3$ - $P_1$ , com  $\varepsilon_{RMises} = |P_1 - P_3| = 1.1\%$ .

Durante a execução do algoritmo, quando um trecho  $P_i$ - $P_{i+1}$  for contabilizado, total ou parcialmente, a ele será associada uma variável  $\alpha_i$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ . Se todo o trecho tiver sido contabilizado, então  $\alpha_i = 0$ , caso contrário computa-se  $\alpha_i$  a partir do ponto de cruzamento  $P_i'$  entre  $P_i$ - $P_{i+1}$  e a contagem mais recente (Figura 3), fazendo

$$\alpha_i = \frac{|P_i' - P_i|}{|P_{i+1} - P_i|}$$



**Figura 3.** Definição da variável  $\alpha_i$  que delimita o trecho  $P_i'-P_{i+1}$  já contabilizado e o trecho  $P_i-P_i'$  que ainda será contabilizado pelo algoritmo.

Desse modo, um trecho associado a  $0 < \alpha_i < 1$  já terá contabilizado seu segmento  $P_i'-P_{i+1}$ , enquanto que  $P_i-P_i'$  ainda estará disponível para as contagens futuras, onde  $P_i' = P_i + \alpha_i \cdot (P_{i+1} - P_i)$ . Note que é possível que  $\alpha_i = 1$  se uma contagem anterior cruzou o trecho exatamente sobre  $P_{i+1}$ , criando um ponto de parada para contagens futuras, mas sem clamar nenhum segmento de  $P_i-P_{i+1}$ . Os trechos são todos segmentos de reta, pois assume-se o caso linear elástico. Em um algoritmo computacional, podem-se inicializar todos os  $\alpha_i$  com um valor qualquer fora do intervalo  $[0, 1]$  (e.g.  $\alpha_i = -1$ , para  $i = 1, \dots, n$ ), para indicar que inicialmente nenhum segmento foi contabilizado.

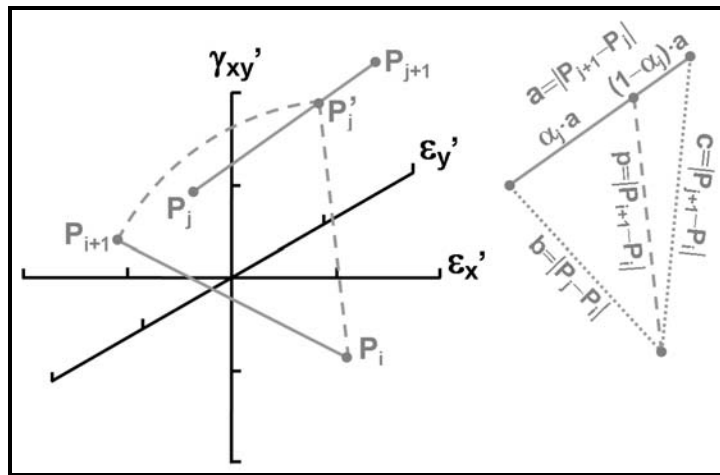
Como as transformações de  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  em  $\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}', \epsilon_x', \epsilon_y'$  e  $\gamma_{xy}'$  são todas lineares, as tensões e deformações em um ponto  $P_i'$  podem ser calculadas linearmente a partir de  $\alpha_i$  e dos valores nos pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$ . E.g., a deformação  $\epsilon_x$  associada a  $P_i'$  é simplesmente  $\epsilon_{xi} + \alpha_i \cdot (\epsilon_{x(i+1)} - \epsilon_{xi})$ . Esta linearidade simplifica muito os cálculos do *rainflow* multiaxial, dispensando o cálculo de interseções entre segmentos e elipses ou elipsóides necessário no algoritmo original de Wang-Brown. Como dito anteriormente, a contagem *rainflow* multiaxial é feita iniciando-se de cada ponto  $P_i$  da história,  $i = 1, 2, \dots, n$ . O algoritmo para a contagem a partir de um ponto inicial  $P_i$  é descrito a seguir. Se o trecho  $P_i-P_{i+1}$  já estiver associado a uma variável  $\alpha_i$ , obtida em uma contagem anterior, então a contagem pára e o ponto de parada será  $P_i' = P_i + \alpha_i \cdot (P_{i+1} - P_i)$ . Caso contrário, se o trecho  $P_i-P_{i+1}$  não estiver associado a nenhum  $\alpha_i$ , então todo esse segmento é contabilizado e associado a um  $\alpha_i = 0$ .

A seguir, procura-se o primeiro ponto  $P_{j+1}$  ( $j > i$ ) que tenha distância maior ou igual à de  $P_{i+1}$  em relação a  $P_i$ . Se não existir, então  $P_{i+1}$  será o ponto final da contagem. Caso contrário, calcula-se o cruzamento com o trecho  $P_j-P_{j+1}$  no ponto  $P_j'$  que possuir a mesma distância que  $P_{i+1}$  ao ponto  $P_i$ , vide Fig. 4. O valor de  $\alpha_j$  associado ao ponto  $P_j'$  é obtido aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo  $P_i-P_j-P_{j+1}$

$$b^2 \cdot [(1 - \alpha_j) \cdot a] + c^2 \cdot [\alpha_j \cdot a] - p^2 \cdot a = [\alpha_j \cdot a] \cdot [(1 - \alpha_j) \cdot a] \cdot a$$

onde  $a^2 \cdot \alpha_j^2 + (c^2 - b^2 - a^2) \cdot \alpha_j + (b^2 - p^2) = 0$  e

$$\alpha_j = \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 - p^2)}}{2a^2}$$



**Figura 4.** Cálculo do ponto de cruzamento  $P_j'$  entre a contagem *rainflow* multiaxial e o trecho  $P_j$ - $P_{j+1}$  no espaço euclidiano reduzido de Mises. Note que, em geral, os triângulos  $P_i$ - $P_j$ - $P_{j+1}$  e  $P_i$ - $P_{i+1}$ - $P_j'$  não estão num mesmo plano.

A solução válida será a menor das 2 soluções que satisfizer  $0 \leq \alpha_j \leq 1$ . Se o trecho  $P_j$ - $P_{j+1}$  já estava associado anteriormente a algum  $\alpha_j^*$  (i.e., parte dele já havia sido contabilizada), então há 2 hipóteses: se  $\alpha_j < \alpha_j^*$ , então o trecho entre  $\alpha_j$  e  $\alpha_j^*$  é contado, o ponto de parada é aquele associado a  $\alpha_j^*$  (devido ao cruzamento com uma contagem anterior), e armazena-se  $\alpha_j$  no lugar de  $\alpha_j^*$ ; ou se  $\alpha_j \geq \alpha_j^*$ , então o ponto de cruzamento  $P_j'$  seria inválido, pois ocorreria sobre um trecho já contado anteriormente, logo o ponto de parada seria  $P_{i+1}$ .

Por outro lado, se nenhuma parte do trecho  $P_j$ - $P_{j+1}$  havia sido contabilizada anteriormente (i.e., se o valor anteriormente armazenado de  $\alpha_j$  era  $-1$ ), então armazena-se o  $\alpha_j$  calculado, contando-se assim o segmento  $P_j'$ - $P_{j+1}$ , e a contagem continua a partir de  $P_{j+1}$  de forma análoga àquela feita a partir de  $P_{i+1}$ . Procura-se então o primeiro ponto  $P_{m+1}$  ( $m > j$ ) que tenha distância maior ou igual à de  $P_{j+1}$  em relação a  $P_i$ . Se não existir, então  $P_{j+1}$  será o ponto final dessa contagem. Caso contrário, calcula-se o cruzamento com o trecho  $P_m$ - $P_{m+1}$  no ponto  $P_m'$  que possuir a mesma distância que  $P_{j+1}$  ao ponto  $P_i$ . O valor de  $\alpha_m$  associado ao ponto  $P_m'$  é obtido aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo  $P_i$ - $P_m$ - $P_{m+1}$ . A expressão de  $\alpha_m$  é análoga à acima para  $\alpha_j$ , basta trocar  $P_j$  por  $P_m$ ,  $P_{j+1}$  por  $P_{m+1}$ , e  $P_{i+1}$  por  $P_{j+1}$ .

O procedimento acima prossegue de forma análoga. Se o trecho  $P_m$ - $P_{m+1}$  já estava associado anteriormente a algum  $\alpha_m^*$ , então há 2 hipóteses: se  $\alpha_m < \alpha_m^*$ , então o trecho entre  $\alpha_m$  e  $\alpha_m^*$  é contado, o ponto de parada é associado a  $\alpha_m^*$ , e armazena-se  $\alpha_m$  no lugar de  $\alpha_m^*$ ; ou se  $\alpha_m \geq \alpha_m^*$ , então o ponto de cruzamento  $P_m'$  seria inválido e o ponto de parada seria  $P_{j+1}$ . Se nenhuma parte do trecho  $P_m$ - $P_{m+1}$  havia sido contabilizada anteriormente, então armazena-se o  $\alpha_m$  calculado, contando-se assim o segmento  $P_m'$ - $P_{m+1}$ , e a contagem continua a partir de  $P_{m+1}$ . Procura-se então o primeiro ponto  $P_{r+1}$  ( $r > m$ ) que tenha distância maior ou igual à de  $P_{m+1}$  em relação a  $P_i$ , e assim por diante.

O algoritmo continua até que seja encontrado o ponto final de parada associado ao ponto inicial  $P_i$ . A linearidade das transformações adotadas permite que todas as tensões e deformações resultantes associados aos pontos de cruzamento dessa contagem iniciada em  $P_i$  sejam obtidas. Todo o processo se repete até que todas as contagens partindo dos pontos  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tenham sido finalizadas. Note que uma contagem pode terminar no ponto  $P_1$ , pois esse algoritmo assume que a história do carregamento é cíclica, e portanto o trecho  $P_n$ - $P_1$  existe e não pode ser





desprezado. No fim do algoritmo, todos os seguimentos serão associados a valores  $\alpha_i = 0$ , indicando que todos eles foram integralmente contabilizados. A Figura 5 mostra o fluxograma do algoritmo, em pseudo-código.

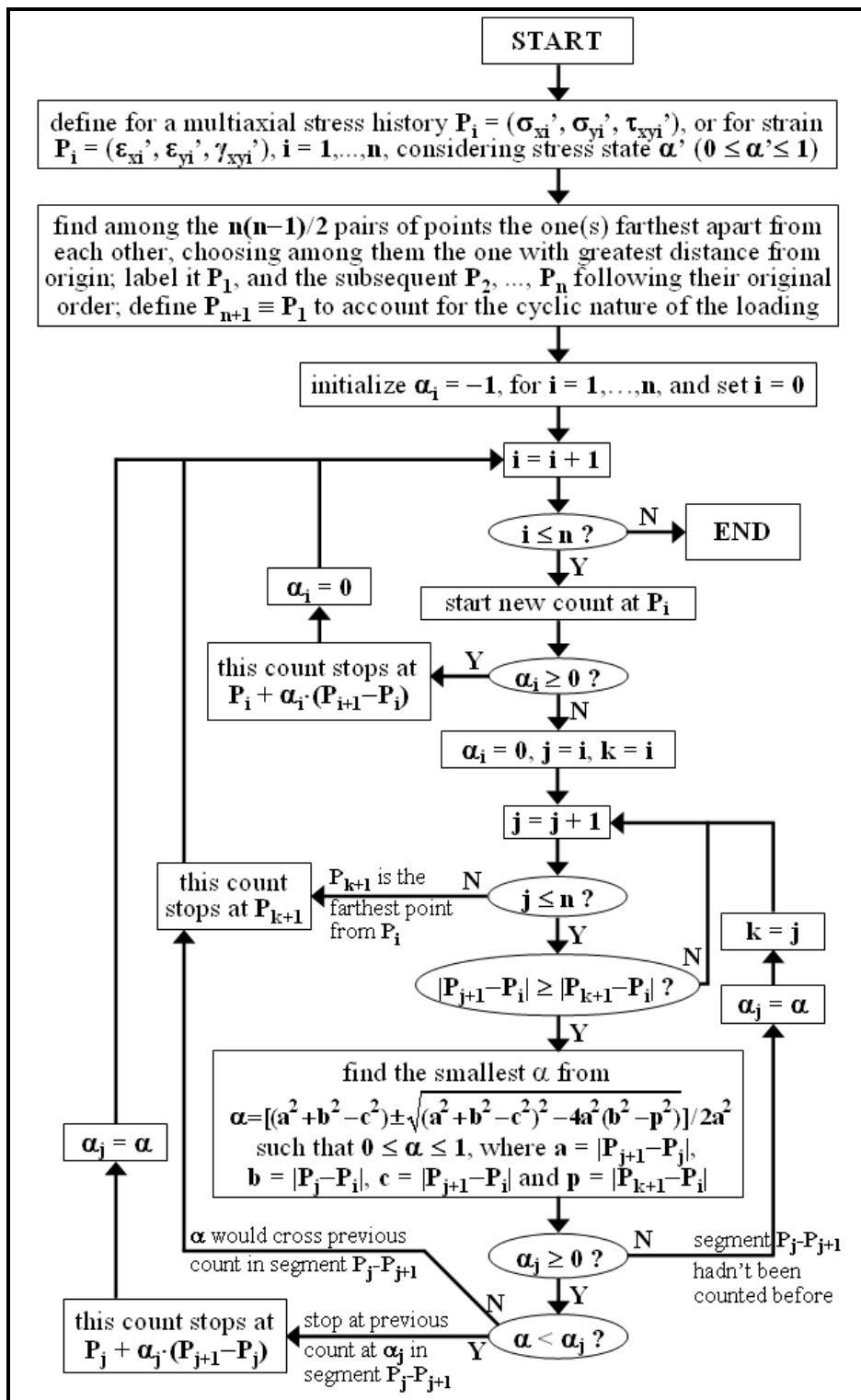


Figura 5. Fluxograma do algoritmo de Wang-Brown modificado.



#### 4 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE WANG-BROWN MODIFICADO

Nesta seção o algoritmo de Wang-Brown modificado é aplicado à história NP cíclica de tração-torção da Fig. 1. Supondo que o coeficiente de Poisson elástico é  $\nu_{el} = 0.3$ , e que  $\epsilon_{el} \cong \epsilon_{pl}$ , temos que  $\bar{\nu} = 0.4$ . Definindo  $\epsilon \equiv \epsilon_x$  e  $\gamma \equiv \gamma_{xy}$ , e usando a lei de Hooke assumindo que  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , temos que  $\alpha' = 0$  (estado de tensão plana) e também  $\epsilon_y = \epsilon_z = -\bar{\nu}\epsilon$ . Usando as transformações lineares do EER de deformação de Mises para  $\alpha' = 0$  (estado de tensão plana), obtêm-se

$$\epsilon_x' \equiv \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2(1 - \bar{\nu})} = \frac{\epsilon}{2}, \quad \epsilon_y' \equiv \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2(1 + \bar{\nu})} \sqrt{3} = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{3}, \quad \gamma_{xy}' \equiv \frac{\gamma_{xy}}{2(1 + \bar{\nu})} \sqrt{3}$$

Como  $\epsilon_x'$  e  $\epsilon_y'$  são proporcionais neste problema, é possível reduzir a dimensão do EER de deformação de Mises de 3 para 2, definindo a deformação normal

$$\epsilon' \equiv \sqrt{\epsilon_x'^2 + \epsilon_y'^2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \epsilon$$

A história pode então ser representada em um diagrama bidimensional por  $(\epsilon', \gamma_{xy}')$   $= (\epsilon_x, 0.6186 \cdot \gamma_{xy}) = \{(2, 0.6186) \rightarrow (-1, 1.2372) \rightarrow (2, -1.2372) \rightarrow (-2, -1.2372) \rightarrow (2, 1.2372) \rightarrow (-2, 0)\}\%$ . Dentre todos os pares de pontos (consecutivos ou não) da história, o mais afastado (com o maior  $\epsilon_{RMises}$ ) é composto pelos pontos  $(-2, -1.2372)\%$  e  $(2, 1.2372)\%$ , que haviam sido denominados F e A, respectivamente, na Fig. 1. A distância entre eles é  $\epsilon_{RMises} = 4.7035\%$ . Como ambos possuem a mesma distância 2.3517% à origem, qualquer um dos dois pode ser escolhido para ser o primeiro ponto de início de contagem  $P_1$ . Escolhe-se então o ponto  $(2, 1.2372)\%$  (antes chamado A) para ser  $P_1$ , e os demais são renominados  $P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  (B, C, D, E e F, respectivamente - Figura 6), seguindo a ordem da história cíclica original. A história reordenada a partir de  $P_1$  passa a ser então  $(\epsilon', \gamma_{xy}') = \{(2, 1.2372) \rightarrow (-2, 0) \rightarrow (2, 0.6186) \rightarrow (-1, 1.2372) \rightarrow (2, -1.2372) \rightarrow (-2, -1.2372)\}\%$ .

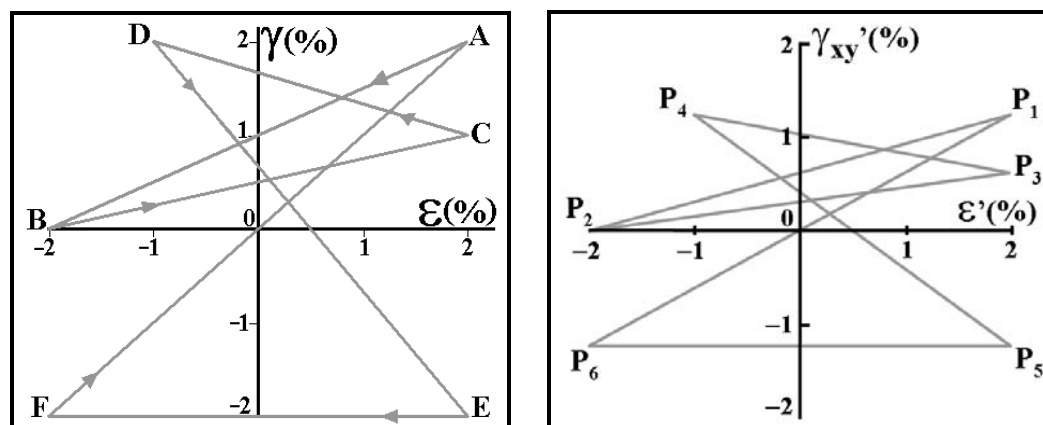


Figura 6. Mapa  $\gamma\epsilon$  da carga NP, e EER de Mises correspondente.

A contagem que inicia em  $P_1$  contabiliza todo o trecho  $P_1$ - $P_2$ , fazendo com que  $\alpha_1 = 0$ . É fácil ver na Fig. 6 que o único ponto mais distante que  $P_2$  em relação a  $P_1$  é



o  $P_6$ , e assim  $a = |P_6 - P_5| = 4.0\%$ ,  $b = |P_5 - P_1| = 2.4744\%$ ,  $c = |P_6 - P_1| = 4.7035\%$  e  $p = |P_2 - P_1| = 4.1870\%$ , obtendo

$$\alpha_5 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 - p^2)}}{2a^2} = \begin{cases} 0.8444 \\ -0.8444 \end{cases}$$

A menor solução acima que satisfaz  $0 \leq \alpha_5 \leq 1$  é  $\alpha_5 = 0.8444$ . A primeira contagem então se encerra no ponto  $P_6$ , o mais distante em relação a  $P_1$ , tendo percorrido o trecho  $P_1 - P_2 - P_5' - P_6$ , onde  $P_5' = P_5 + \alpha_5 \cdot (P_6 - P_5) = (-1.3776, -1.2372)\%$ . Note que  $P_5'$  corresponde ao ponto  $B'$  da Figura 2, como esperado. O algoritmo procede então com as contagens iniciadas em  $P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ .

Ao final do algoritmo, após contabilizar toda a história, todos os  $\alpha_i$  valem  $0$ , como esperado. A contagem resulta nos mesmos trechos obtidos pelo algoritmo original, vide Figura 7 à esquerda, validando o algoritmo proposto, porém com uma complexidade e custo computacional muito menores.

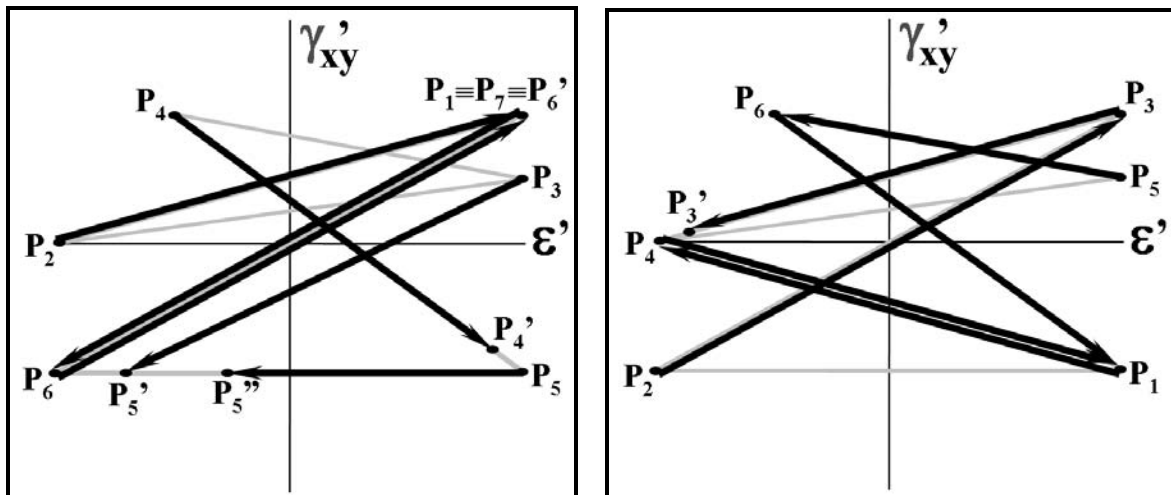


Figura 7. EER de Mises dos eventos contados segundo o algoritmo de Wang-Brown modificado (esquerda) e segundo Wang-Brown original iniciando do ponto  $P_1 \equiv E$  (direita).

Segundo o algoritmo original de Wang-Brown, o ponto  $P_5$  da Figura 7 à esquerda (equivalente ao ponto  $E$  da Figura 2) poderia ter sido escolhido como o primeiro ponto de início de contagem, pois possui mesmo  $\epsilon_{Mises}$  absoluto que  $A$  e  $F$ . Neste caso, este ponto  $E$  passaria a ser o primeiro ponto de contagem, passando a ser denominado  $P_1$ , e gerando a contagem apresentada na Figura 7 à direita, que é muito diferente daquela obtida pelo algoritmo de Wang-Brown modificado. Note que a contagem da Figura 7 à direita só capturou 1 trecho associado ao maior  $\epsilon_{RMises}$  da história,  $4.7035\%$ , na contagem  $P_2 - P_3$ , não conseguindo identificar o outro trecho  $P_3 - P_2$ . Essa é uma falha grave da contagem de Wang-Brown original pois, ao não identificar esse trecho de máximo  $\epsilon_{RMises}$ , previsões potencialmente não-conservativas podem ser feitas devido à alta não-linearidade da relação entre a deformação e o dano. Já no algoritmo de Wang-Brown modificado, como visto na Figura 7 à esquerda, ambos os trechos críticos de  $\epsilon_{RMises} = 4.7035\%$  foram identificados, através das contagens  $P_1 - P_2 - P_5' - P_6$  e  $P_6 - P_1$ .

## 5 CONCLUSÃO

O algoritmo proposto neste trabalho introduz duas melhorias significativas em relação ao algoritmo de Wang-Brown original. Primeiro, ele elimina a possibilidade de desprezar o evento associado ao maior dano da história e, portanto, a possível geração de previsões de dano à fadiga multiaxial não-conservativas. E segundo, a sua implementação é muito simplificada quando formulada no espaço Euclidiano reduzido de tensões ou deformações. Um pseudo-código simples mas eficiente é apresentado para gerar as contagens rainflow multiaxiais, permitindo o cálculo eficiente do dano à fadiga em histórias não-proporcionais.

## REFERÊNCIAS

- 1 BANNANTINE, J.A.; SOCIE, D.F. A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method, *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*,ESIS Publication 10, p.35-51, 1991.
- 2 SOCIE, D.F.; MARQUIS, G.B. *Multiaxial Fatigue*, SAE 1999.
- 3 CASTRO, J.T.P.; MEGGIOLARO, M.A. *Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço*, ISBN 1449514693, , CreateSpace, 2009
- 4 WANG, C.H.; BROWN, M.W. Life prediction techniques for variable amplitude multiax-ial fatigue - part 1: theories, *Journal of Engineering Materials and Technology* v.118, p.367-370, 1996.
- 5 BROWN, M.; MILLER, K.J. A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions, *Institute of Mechanical Engineers*, v.187, p.745-756, 1973.
- 6 FATEMI, A.; SOCIE, D.F. A critical plane approach to multiaxial damage including out-of-phase loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* v.11, p.149-166, 1988.
- 7 MEGGIOLARO, M.A.; CASTRO, J.T.P. Comparação entre métodos de previsão de vida à fadiga sob cargas multiaxiais I: modelos tensão-vida e deformação-vida”, *Anais do 60º Congresso Anual da ABM*, p.1976-1985, 2005.
- 8 MEGGIOLARO, M.A.; CASTRO, J.T.P. Comparação entre métodos de previsão de vida à fadiga sob cargas multiaxiais II: relações tensão-deformação, *Anais do 60º Congresso Anual da ABM*, p.1986-1995, 2005.
- 9 PAPADOPOULOS, I.V.; DAVOLI, P.; GORLA, C.; FILLIPPINI, M.; BERNASCONI, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. Fatigue*, v. 19, n. 3, p. 219–235, 1997.