

VERIFICAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA DEFORMAÇÃO MÉDIA NA VIDA EM FADIGA DE BAIXO CICLO DA LIGA AA7175-T1 ATRAVÉS DAS RELAÇÕES SWT, MORROW E WALKER ¹

Gigliola Salerno²
Rodrigo Magnabosco³
Carlos de Moura Neto⁴

Resumo

Este trabalho teve por objetivo principal verificar a extensão da influência da deformação média na vida em fadiga de baixo ciclo da liga de alumínio AA7175-T1, utilizando as relações SWT, Morrow e Walker. Devido à falta de dados referente à liga em estudo, esta foi inicialmente caracterizada quanto aos comportamentos monotônico e cíclico. Caracterizou-se o comportamento mecânico da liga AA7175-T1 através de ensaios monotônicos de tração segundo ASTM E08M-04 e através de ensaios de fadiga controlados por amplitude de deformação segundo ASTM E606-92, utilizando-se não só deformação média nula no ciclo de carregamento como também deformações médias variando de 0,5% a 1,5%. Os resultados assim obtidos foram tratados utilizando-se as relações SWT, Morrow e Walker, verificando a aplicabilidade destas na previsão da vida em fadiga em carregamentos onde a deformação média não é nula. Os ensaios de tração apresentaram as propriedades mecânicas e a relação de Ramberg-Osgood. Para o material estudado, foi observado que o parâmetro SWT representa satisfatoriamente os dados encontrados. As equações de Morrow aproximam os dados de deformação média não nula aos de deformação média nula. Das relações estudadas, a de Walker é a que melhor representa o comportamento do material independente da deformação média aplicada.

Palavras-chave: Fadiga de baixo ciclo; Deformação média; AA7175-T1.

MEAN DEFORMATION INFLUENCE IN A LOW CYCLE FATIGUE BEHAVIOR OF AA7175-T1 ALUMINUM ALLOY USING SWT, MORROW AND WALKER RELATIONS

Abstract

This work evaluated the mean deformation influence on low cycle fatigue life in AA7175-T1, using fatigue equations developed by Morrow, SWT and Walker. For that, AA7175-T1 aluminum alloy was characterized under cyclic loading, obtaining the fatigue ductility and strength exponents and coefficients related to strain influence on fatigue life. The monotonic behavior of the alloy was determined by tension tests, according to ASTM E08M-04. Strain-controlled tests obtained the total number of cycles to failure for a given strain amplitude at values of mean strain, according ASTM E606-92. The values of mean strain were varied between 0.5% and 1.5%. Using the experimental data, it was proved that SWT parameter represents considerably the fatigue life data, although it is conservative between 30 to 1000 cycles. Morrow's relationships gave good results, while SWT relation fits the experimental results in a better way, and both relations are conservative over 30 cycles. For all relationships that consider mean strain using mean stress values, Walker relationship better defined the AA7175-T1 alloy mean strain cyclic behavior.

Key words: Low cycle fatigue; Mean strain; AA7175-T1.

¹ Contribuição técnica apresentada na 61º Congresso Anual da ABM, de 24 a 27 de julho de 2006, Rio de Janeiro – RJ

² Doutoranda do Politecnico di Milano, giglia@ig.com.br

³ Prof. Dr. do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Universitário da FEI, rodrigmagn@fei.edu.br

⁴ Prof. Dr. da Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica do Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, mneto@ita.br

1 INTRODUÇÃO

Para a curva tensão-deformação cíclica, a equação de amplitude de deformação total real, segundo Ramberg-Osgood, é dada em função da amplitude de tensão real, definindo-se os valores do coeficiente de resistência cíclico (H') e do expoente de encruamento cíclico (n'):⁽¹⁾

$$\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon}_{ae} + \tilde{\varepsilon}_{ap} = \frac{\tilde{\sigma}_a}{E} + \left(\frac{\tilde{\sigma}_a}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (\text{eq. 1}).$$

Choiu (2003) propôs uma modificação nesta relação, considerando a influência da tensão e da deformação média em um dado carregamento:⁽²⁾

$$\tilde{\varepsilon}_a = \frac{\tilde{\sigma}_{\text{máx}}}{E} + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\text{máx}}}{H'_e} \right)^{\frac{1}{n'_e}} \quad (\text{eq. 2}),$$

sendo H'_e e n'_e parâmetros do material e diferentes dos valores de H' e n' .

A relação que rege o comportamento a fadiga de um dado material para deformação média nula é dada pela equação 3, em que a amplitude total de deformação imposta está em função do número de ciclos até a fratura. Os expoentes e os coeficientes de resistência (b e σ'_f) e ductilidade (c e ε'_f) à fadiga desta equação são obtidos por meio da curva ε - N :⁽³⁻⁵⁾

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (\text{eq. 3}).$$

Com intuito de verificar a influência da deformação média e sabendo que esta se relaciona com a tensão média, conforme equação 4, serão utilizadas as relações que consideram a influência da tensão média para verificar o comportamento do material em estudo.

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} + \varepsilon_{mp} \quad (\text{eq. 4}).$$

Uma relação sugerida por Smith, Watson e Topper,⁽⁶⁾ denominada 'SWT', é baseada no fato de que o produto $\sigma_{\text{máx}} \varepsilon_a$ é constante para uma dada vida, mesmo assumindo diferentes combinações de amplitude de deformação e tensão média.^(1,6) Assim, tem-se:

$$\sigma_{ar} \varepsilon_{ar} E = (\sigma'_f)^2 (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f E (2N_f)^{b+c} \quad (\text{eq. 5}).$$

O valor da amplitude de deformação (ε_a) pode ser obtido através da equação 2 para qualquer carregamento, em uma tentativa de estimar a vida em fadiga sob condições de tensão e deformação média.⁽²⁾ Sendo assim, a relação SWT modificada, segundo Chiu:⁽²⁾

$$\tilde{\sigma}_{\text{máx}} E \left[\frac{\tilde{\sigma}_{\text{máx}}}{E} + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\text{máx}}}{H'_e} \right)^{\frac{1}{n'_e}} \right] = (\sigma'_f)^2 (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f E (2N_f)^{b+c} \quad (\text{eq. 6}).$$

Morrow propôs que a amplitude total de deformação com a influência da tensão média é dada pela relação:^(1,7)

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^b + \varepsilon'_f \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^c \quad (\text{eq. 7}).$$

Sua segunda proposta utiliza a tensão real de ruptura com a correção de Bridgman ($\tilde{\sigma}_{fB}$), pois em alguns casos pode ser considerada aproximadamente igual ao coeficiente de resistência à fadiga (σ'_f):⁽⁷⁾

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\tilde{\sigma}_{fB}} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^b + \varepsilon'_f \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\tilde{\sigma}_{fB}} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^c \quad (\text{eq. 8}).$$

Existe ainda uma terceira proposta que leva em consideração do parâmetro SWT que resulta na relação SWT-Morrow:⁽⁷⁾

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1}{2b}} \right]^b + \varepsilon'_f \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1}{2b}} \right]^c \quad (\text{eq. 9}).$$

Nos estudos de SWT e Morrow para as equações 5 a 9 os valores dos expoentes b e c não variam para os diversos carregamentos aplicados e são obtidos a partir de dos dados de fadiga para tensão e deformação média nulas.

No entanto, para as relações de Walker as propriedades cíclicas do material (b, c, σ'_f , ε'_f) assumem o índice w e seus valores são diferentes daqueles obtidos para deformação e tensão media nulas; há ainda o parâmetro de ajuste γ que pode ser considerado propriedade do material. Desta forma:^(7,8)

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_{fw}}{E} \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1-\gamma}{b_w}} \right]^{b_w} + \varepsilon'_{fw} \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1-\gamma}{b_w}} \right]^{c_w} \quad (\text{eq. 10}).$$

Deste modo, neste trabalho foram utilizadas as relações SWT (eq. 5 e 6), Morrow (eq. 7, 8 e 9) e Walker (eq. 10) para verificar a extensão da influência da deformação média na vida em fadiga de baixo ciclo da liga de alumínio AA7175-T1, caracterizada sob carregamento cíclico, verificando qual destas relações melhor se aplica à caracterização da vida em fadiga deste material.

2 MATERIAL E MÉTODOS

Foram utilizados corpos-de-prova da liga de alumínio AA7175-T1, cuja composição química encontra-se na Tabela 1. Foram realizados ensaios de tração e de fadiga em uma máquina universal de ensaios MTS, servo-controlada e com capacidade de carga de 250kN. Estes corpos-de-prova foram usinados, lixados e finalmente polidos com óxido de cromo de granulometria 2 μ m. Apresentam rugosidade transversal de 0,035 \pm 0,015 e rugosidade longitudinal de 0,038 \pm 0,018, valores abaixo dos exigidos na norma ASTM E606-04, que é de 0,2 μ m.

Tabela 1. Composição química da liga AA7175-T1 em estudo.

Elemento	Zn	Mg	Cu	Cr	Mn	Si	Al
%massa	5,13	2,32	1,40	0,18	0,02	0,09	balanço

Ensaio de tração foram conduzidos segundo a ASTM E08M-04,⁽⁹⁾ caracterizando o comportamento monotônico do material, e os ensaios de fadiga de baixo ciclo foram controlados por um extensômetro de 25 mm de curso, a temperatura de 22 \pm 2°C e frequência de 0,5 Hz, obedecendo-se à norma ASTM E606-04.⁽⁹⁾ Os valores das

amplitudes de deformação, impostos nos ensaios para cada valor de deformação média utilizado, são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Variação das amplitudes de deformação aplicadas nos ensaios para as diversas deformações médias utilizadas.

Deformação Média (%)	Amplitude de Deformação (%)
0,0	0,6 a 2,0
0,5	0,5 a 1,5
1,0	0,7 a 1,5
1,5	0,6 a 1,0

3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Foram realizados ensaios de tração nos corpos-de-prova da liga AA7175-T1, a partir dos quais foram obtidas as propriedades deste material reunidas na Tabela 3.

Tabela 3. Propriedades mecânicas monotônicas do material em estudo.

Propriedades Mecânicas	Liga AA7175-T1
Módulo de Elasticidade, E [GPa]	71±1,8
Limite de Escoamento, σ_{LE} [MPa]	611±6,5
Limite de Resistência, σ_{LR} [MPa]	656±9,7
Tensão Real de Ruptura, $\tilde{\sigma}_{fB}$ [MPa]	718±7,9
Alongamento em 25 mm [%]	10±1,3
Redução de Área, RA [%]	13,2±2,5
Deformação Real de Ruptura, $\tilde{\epsilon}_r$	0,142±0,025

Os resultados dos ensaios de fadiga com deformação média nula promoveram a extração dos coeficientes de resistência (σ'_f) e ductilidade à fadiga (ϵ'_f) e dos expoentes de resistência (b) e ductilidade (c) à fadiga, definidos na equação 03 e mostrados na Tabela 4, onde também se encontram os parâmetros para as relações de Ramberg-Osgood (Equações 1 e 3).

Tabela 4. Propriedades mecânicas cíclicas do material em estudo, obtidas em $\epsilon_m=0$.

Propriedades Mecânicas Cíclicas	Liga AA7175-T1
Expoente de Encruamento Cíclico, n'	0,038
Coefficiente de Resistência Cíclico, H' [MPa]	783
Coefficiente de Resistência à Fadiga, σ_f [MPa]	814
Expoente de Resistência à Fadiga, b	-0,059
Coefficiente de Ductilidade à Fadiga, ϵ_f	0,670
Expoente de Ductilidade à Fadiga, c	-1,184
H'_ϵ	755
n'_ϵ	0,035

Substituindo na equação 5, parâmetro 'SWT', as propriedades obtidas com deformação média nula apresentadas na Tabela 4, obtém-se a equação 11. A Figura 1 apresenta a parcela constante e independente da variação da deformação média na forma $\sqrt{\sigma_{\max} \epsilon_a} \mathbf{E}$ em MPa e mostra que a equação 11 é válida para número de ciclos até a fratura superior a 30, já que os pontos experimentais a diferentes valores de deformação média estão muito próximos da curva calculada, ou seja:

$$\sigma_{\max} \varepsilon_a E = \alpha (2N_f)^\beta + \gamma (2N_f)^\delta \quad (\text{eq. 11}),$$

em que:

$$\alpha = \sigma_r'^2 = 814^2 = 662.596 \text{ MPa}^2 \quad \delta = b + c = (-0,059) + (-1,184) = -1,243$$

$$\beta = 2b = 2 \cdot (-0,059) = -0,118 \quad E = 71.000 \text{ MPa}$$

$$\gamma = \sigma_r' \cdot \varepsilon_r' \cdot E = 814 \cdot 0,670 \cdot 71000 = 38.721.980 \text{ MPa}^2$$

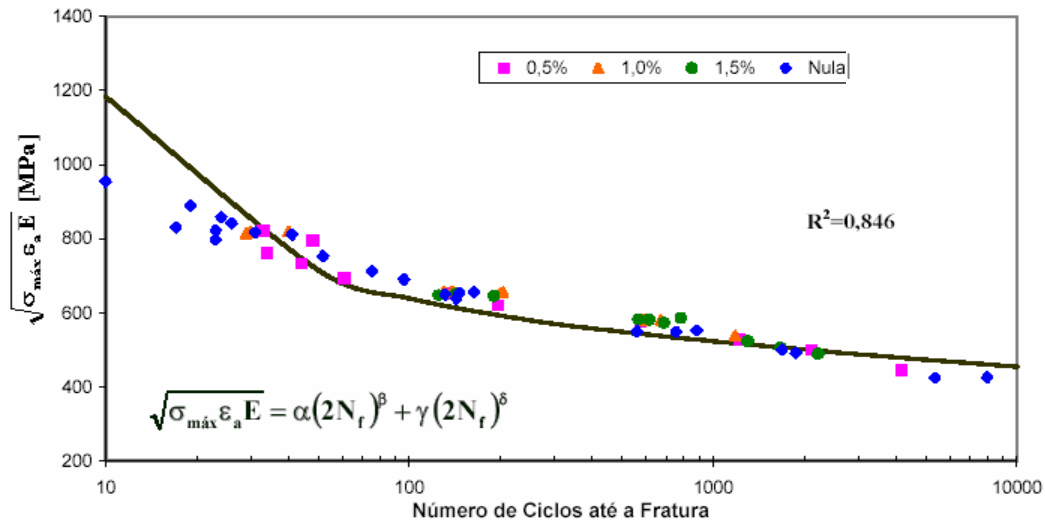


Figura 1. Curva da constante $\sqrt{\sigma_{\max} \varepsilon_a E}$ em função do número de ciclos a fratura, para os valores de deformação média de 0 a 1,5%.

A equação 11 apresenta alto coeficiente de correlação ($R^2=0,846$), mostrando que a relação 'SWT' representa muito bem o comportamento do material. No entanto, nota-se que esta é conservativa entre 30 e 1000 ciclos.

Substituindo na equação 6 as propriedades da Tabela 4 obtém-se a relação SWT modificada, segundo Chiou (2003), observada na equação 12. Comparando esta com os pontos experimentais na Figura 2 nota-se que estes, para deformação média não nula, estão muito dispersos apresentando um baixo coeficiente de correlação ($R^2=0,671$) e são mais conservativos em relação à Figura 1, não sendo uma aproximação considerável para prever o comportamento à fadiga do material considerando deformação e tensão média:

$$\tilde{\sigma}_{\max} E \left[\frac{\tilde{\sigma}_{\max}}{E} + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{\max}}{H'_e} \right)^{\frac{1}{n'_e}} \right] = \alpha (2N_f)^\beta + \gamma (2N_f)^\delta \quad (\text{eq. 12}),$$

em que:

$$\delta = b + c = (-0,059) + (-1,184) = -1,243$$

$$E = 71.000 \text{ MPa}$$

$$H'_e = 755 \text{ MPa}$$

$$n'_e = 0,035$$

$$\alpha = \sigma_r'^2 = 814^2 = 662.596 \text{ MPa}^2$$

$$\beta = 2b = 2 \cdot (-0,059) = -0,118$$

$$\gamma = \sigma_r' \cdot \varepsilon_r' \cdot E = 814 \cdot 0,670 \cdot 71000 = 38.721.980 \text{ MPa}^2$$

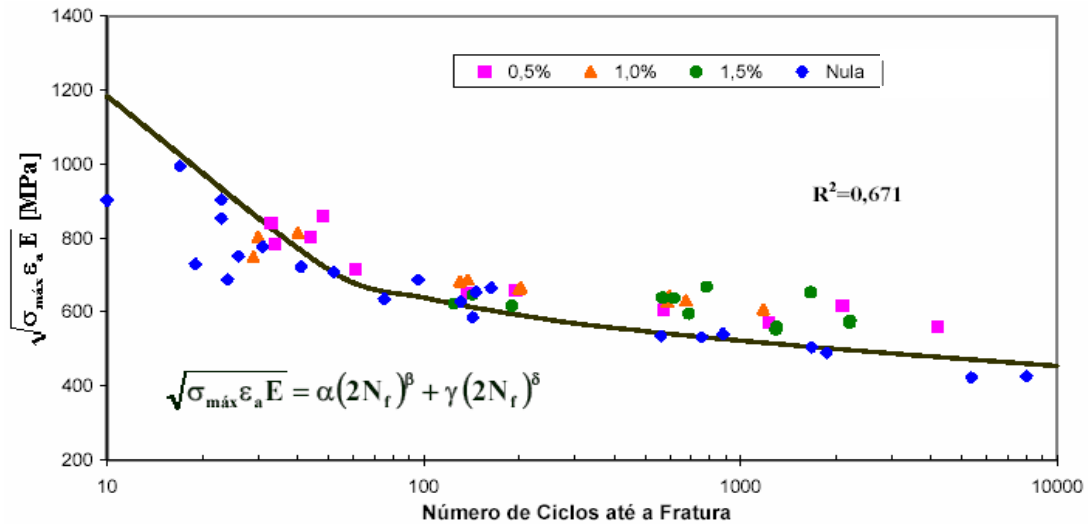


Figura 2. Curva SWT modificada, segundo Chiou,⁽²⁾ para os valores de deformação média de 0 a 1,50%.

Utilizando a equação 8 para tensão real de ruptura ($\tilde{\sigma}_{fB}$) encontra-se a relação apresentada na equação 13, com as propriedades cíclicas do material para deformação média nula. Na Figura 3 apresenta-se a curva amplitude de deformação (ϵ_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*), sendo a curva traçada calculada para tensão média nula; e os pontos representam os valores obtidos nos ensaios de deformação média com suas respectivas tensões médias e amplitudes de deformação:

$$\epsilon_a = \frac{814}{71000} \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{718} \right)^{-0,059} \right]^{-0,059} + 0,670 \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{718} \right)^{-0,059} \right]^{-1,184} \quad (\text{eq. 13}).$$

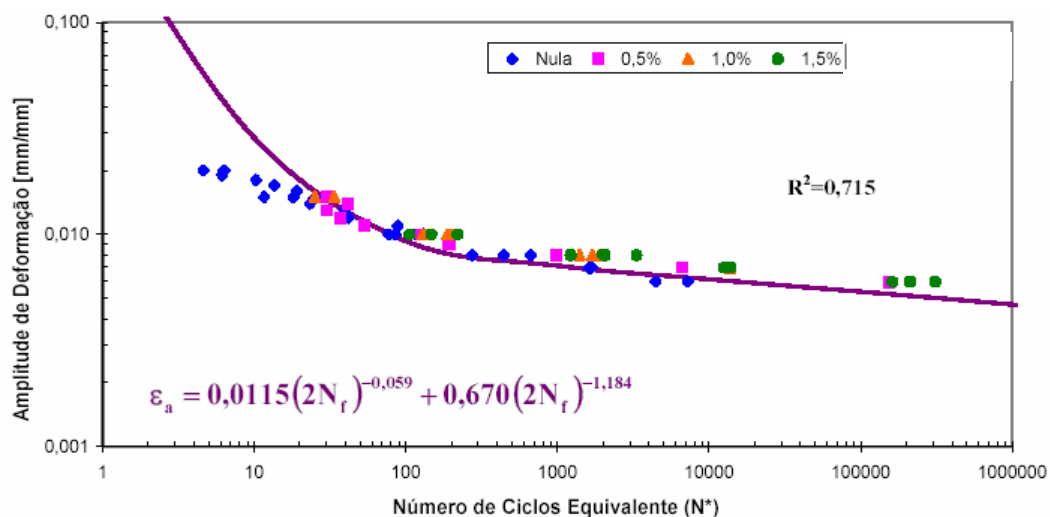


Figura 3. Curva amplitude de deformação (ϵ_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*) para a relação de Morrow utilizando a tensão real de ruptura ($\tilde{\sigma}_{fB}$).

Sendo considerado o coeficiente de resistência à fadiga (σ'_f) (eq. 7), encontra-se a relação apresentada na equação 14 e na Figura 4 apresenta-se a curva amplitude de deformação (ϵ_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*):

$$\varepsilon_a = \frac{814}{71000} \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{814} \right)^{\frac{1}{-0,059}} \right]^{-0,059} + 0,670 \left[2 \cdot N_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{814} \right)^{\frac{1}{-0,059}} \right]^{-1,184} \quad (\text{eq. 14}).$$

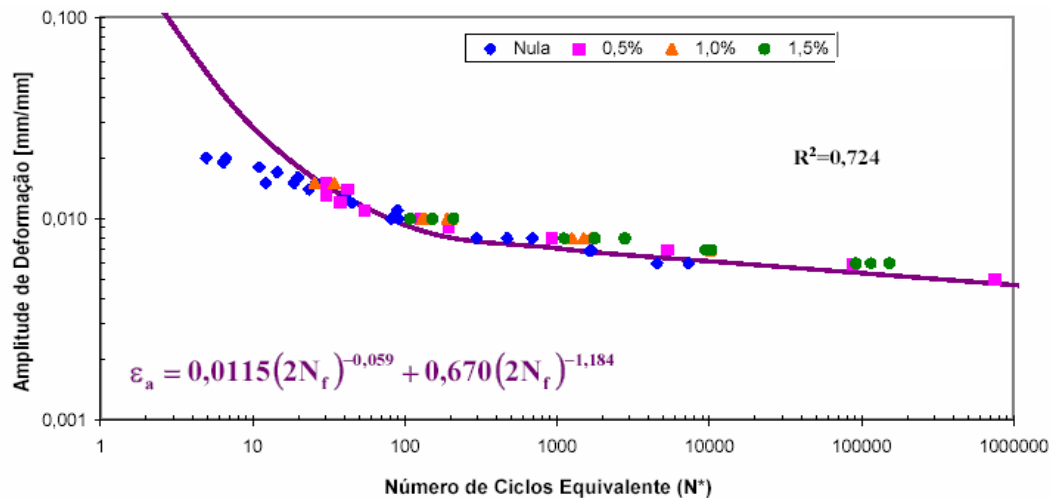


Figura 4. Curva amplitude de deformação (ε_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*) para a relação de Morrow utilizando o coeficiente de resistência à fadiga (σ_f).

A relação SWT-Morrow é apresentada na equação 15 e sua curva amplitude de deformação (ε_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*) é apresentada na Figura 5:

$$\varepsilon_a = \frac{814}{71000} \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1}{2(-0,059)}} \right]^{-0,059} + 0,670 \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1}{2(-0,059)}} \right]^{-1,184} \quad (\text{eq. 15}).$$

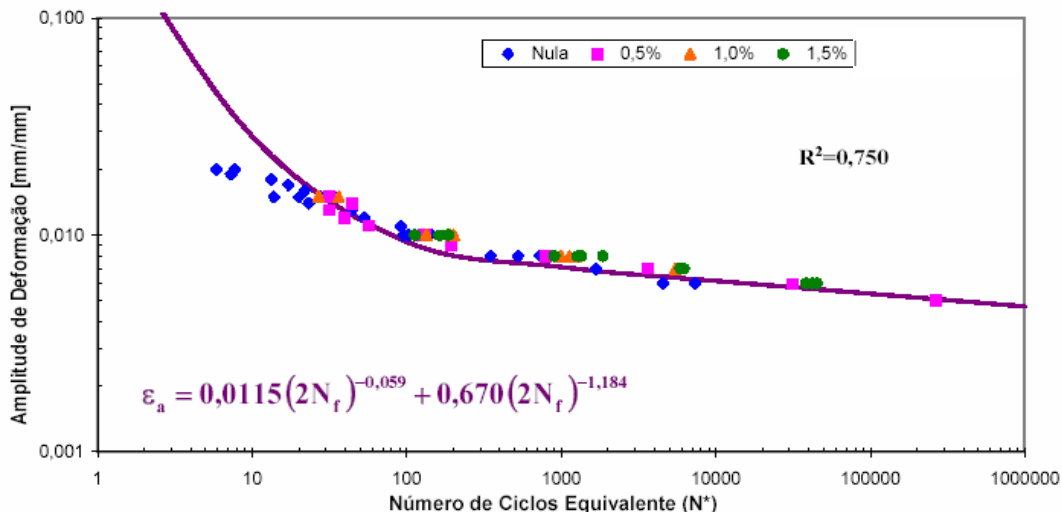


Figura 5. Curva amplitude de deformação (ε_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*) para a relação SWT-Morrow.

De acordo com os dados dos ensaios realizados foram obtidas as propriedades cíclicas do material segundo Walker, resultando na equação 16. Na Figura 6 observa-se que os pontos se apresentam realmente muito próximos à curva. A equação 16 apresenta o mais alto coeficiente de correlação ($R^2=0,957$), sendo esta correlação quase plena entre pontos e curva, em comparação com todas as

equações anteriores (11 a 15), o que significa representar substancialmente o comportamento do material.

$$\varepsilon_a = \frac{862}{71000} \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1-0,515}{-0,067}} \right]^{-0,067} + 0,063 \left[2 \cdot N_f \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\frac{1-0,515}{-0,067}} \right]^{-0,623} \quad (\text{eq. 16}).$$

Onde $\sigma'_{fw}=862\text{MPa}$, $b_w=-0,067$, $\gamma=0,515$, $\varepsilon'_{fw}=0,063$ e $c_w=-0,623$.

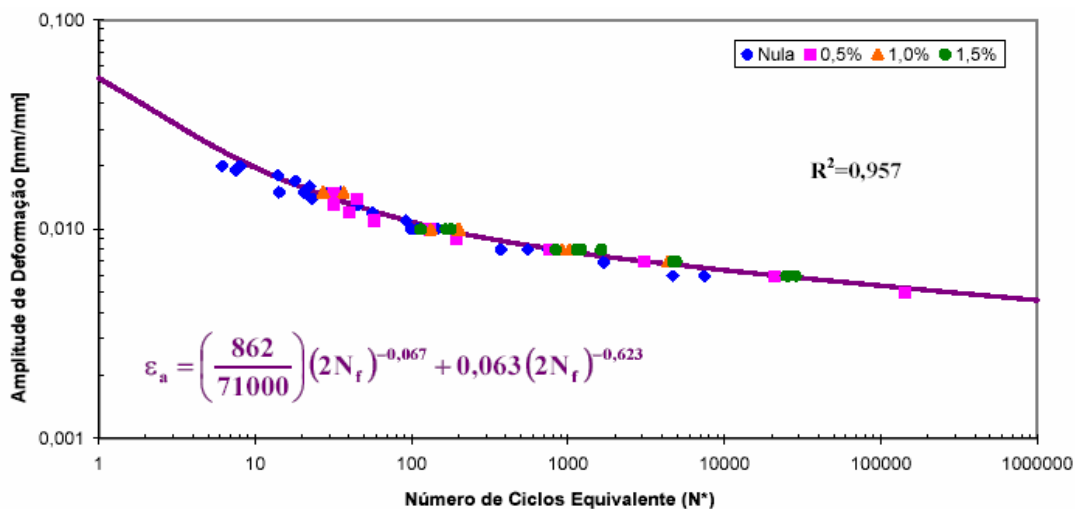


Figura 6. Curva amplitude de deformação (ε_a) em função do número de ciclos equivalente (N^*) para a relação de Walker.

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As relações de Morrow (13, 14 e 15) apresentam coeficientes de correlação consideráveis ($R^2 = 0,715, 0,724$ e $0,750$), apesar do caráter conservativo acima de 30 ciclos; além disso, diferem muito pouco entre si, mesmo quando do uso dos valores da tensão real de ruptura ($\tilde{\sigma}_{fb}$) ou do coeficiente de resistência à fadiga (σ'_f), que apresentam uma diferença de 12%. Porém, o parâmetro SWT-Morrow (equação 15), apresenta o melhor ajuste ao comportamento do material dentre as relações estudadas. Apesar deste fato, SWT-Morrow não representa o comportamento da mesma forma que o parâmetro SWT (Equação 11), mais adequado para tanto ($R^2=0,846$). No entanto, a relação de Walker (Equação 16) apresenta correlação quase plena ($R^2=0,957$) entre pontos e curva.

Na Tabela 5 pode se observar os valores do coeficiente de correlação (R^2) para cada equação utilizada em relação aos dados experimentais. Quanto mais próximo de 1 é o valor deste coeficiente, maior é o grau de dependência entre as variáveis e maior é a confiabilidade de se escrever uma variável em função da outra.⁽¹⁰⁾ Sendo assim, a relação que apresenta maior valor, ou seja, que melhor se ajusta ao comportamento experimental dentre as equações que consideram a influência da deformação média através dos valores da tensão média, é a relação de Walker representada pela equação 16.

Tabela 5. Relação dos coeficientes de correlação (R^2) para cada equação obtida.

Método	Equação	R^2
SWT	11	0,846
SWT-Chiou	12	0,671
Morrow ($\tilde{\sigma}_{fB}$)	13	0,715
Morrow (σ'_f)	14	0,724
SWT-Morrow	15	0,750
Walker	16	0,957

5 CONCLUSÕES

➤ A partir dos dados de deformação média nula pode-se verificar que, para diferentes valores de deformação média, o parâmetro 'SWT' para tensão média nula, desenvolvido por Smith, Watson e Topper,⁽⁶⁾ ajusta-se bem ao comportamento da liga AA7175-T1 entre 30 e 2000 ciclos. No entanto, sua versão modificada, segundo Chiou, está muito aquém do esperado.

➤ As relações de Morrow para número de ciclos equivalente que consideram a influência da tensão média aproximam-se do comportamento do material, sendo o parâmetro 'SWT-Morrow' para tensão média diferente de zero, aquele que melhor se ajusta ao comportamento do material em estudo para número de ciclos acima de 30.

➤ A relação de Walker, que assume parâmetros próprios diferentes dos obtidos para deformação média nula, apresenta o melhor ajuste para os dados experimentais entre as equações que consideram a influência da deformação média por meio dos valores da tensão média, caracterizando substancialmente o comportamento da liga AA7175- T1 para fadiga de baixo ciclo sob carregamentos com deformação média nula ou não.

REFERÊNCIAS

- 1 STEPHENS, R. I. Metal Fatigue in Engineering 2. ed Wiley-Interscience Publication USA 2001 pág.113 - 115.
- 2 CHIOU, Y.; YIP, M. Effect of Mean Strain Level on the Cyclic Stress-Strain Behavior of AISI 316 Stainless Steel. Materials Science & Engineering, n. A354, p. 270-278, 2003.
- 3 MEYERS, M. A.; Chawla, K.K. Mechanical Behavior of materials. Prentice Hall: NJ 1999 1.ed cap.14.
- 4 SURESH, S. Fatigue of Materials Cambridge Press: Boston 2 ed. 1998 cap.8.
- 5 DOWLING, N. E. Mechanical Behavior of materials. Prentice Hall: NJ 1999 2.ed cap.14.
- 6 SMITH, K.N., WATSON, P., TOPPER, T.H. A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals Journal of Materials JMLSA Vol. 5 N°. 4 Dec. 1970 p.767 - 778.
- 7 DOWLING, N. E. Mean Stress Effects in Stress-Life and Strain-Life Fatigue. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE FADIGA – SAE BRASIL, III, 2004, São Paulo – SP. Anais....
- 8 WALKER, K.. The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 e 7075-T6 Aluminum. Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life. ASTM STP 462, Philadelphia PA, p. 1-14, 1970.

- 9 ASTM E606-92 Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing ASM International- The Materials Information Society 1992.
- 10 KORN, G. A.; KORN T.M. **Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review.** 2. ed. New York: Dover Publications Inc., 1968 c. 19, p. 638-639.