

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO PARA AJUSTE DE CURVAS DE HISTERESE MAGNÉTICA DO MATERIAL SOMALOY 550¹

*Fernanda Aparecida Sampaio da Silva²
Marcos Flávio de Campos³
Daniel Rodrigues⁴
Bruno Antunes da Silva⁵*

Resumo

Ao ser feita a análise do gráfico da função tangente hiperbólica é perceptível o aspecto sigmóide da curva resultante. A partir da equação original da tangente hiperbólica introduziram-se parâmetros no modelo, a fim de proporcionar maior precisão ao ajuste. No total, foram introduzidos três parâmetros capazes de ampliar a flexibilidade da curva final, resultando no Modelo da Tangente Hiperbólica. Para cada parâmetro estão atribuídos significados físicos que auxiliam na interpretação das propriedades magnéticas do material em análise. O Modelo da Tangente Hiperbólica foi aplicado em ciclos de histerese de amostras do material Somaloy 550, da marca Höganäs, compostas por pó de ferro e material polimérico. Os ajustes obtidos para este material indicaram que o modelo é preciso e de fácil aplicação.

Palavras-chave: Histerese; Modelagem; Tangente hiperbólica.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR HYSTERESIS CURVE OF MAGNETIC MATERIAL SOMALOY 550

Abstract

The graph of the hyperbolic tangent function has a sigmoid shape. This function is able to adjust magnetic hysteresis curves with sigmoid appearance. Parameters are introduced into the original hyperbolic tangent equation in order to increasing the accurate of adjusts. In the total, three parameters were introduced. Therefore, the adjusting flexibility of the final curve increases. It results in the so-called hyperbolic tangent model. Physical meanings are assigned for each parameter. The model is a tool to analyze magnetic properties of the considered materials. The hyperbolic tangent model was applied in hysteresis curves of Somaloy 550, trademark Höganäs. The samples are composed of iron powder and polymeric material. The adjustments made for this material indicated that the model is accurate and easy to apply.

Key words: Hysteresis; Modeling; Hyperbolic tangent.

¹ *Contribuição técnica ao 67º Congresso ABM - Internacional, 31 de julho a 3 de agosto de 2012, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.*

² *M.Sc. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.*

³ *Prof. D.Sc. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.*

⁴ *D. Sc. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.*

⁵ *Mestrando. Instituto de Pesquisas Tecnológicas, São Paulo, SP, Brasil.*

1 INTRODUÇÃO

Os materiais magnéticos constituem artefato indispensável ao progresso tecnológico. Estão presentes em diversas áreas científicas, tanto tradicionais quanto modernas.

Cada material magnético apresenta características distintas, dadas por seu ciclo de histerese. Este ciclo possui forma variável, de acordo com a frequência sob a qual é submetido. A partir desses ciclos, ou curvas de histerese, é possível extrair informações importantes a respeito do processo de magnetização/desmagnetização imposto ao material ferromagnético. Como exemplo pode-se citar a energia dissipada no processo, que é diretamente proporcional à área do ciclo de histerese.

Existem modelos matemáticos desenvolvidos com o intuito de descrever curvas de histereses magnéticas. Dentre eles: o modelo de Stoner-Wohlfarth (modelo SW),^(1,2) o modelo de Preisach,⁽³⁾ Jiles-Atherton⁽⁴⁾ e, mais recentemente, Takacs.⁽⁵⁾ Esses modelos são propriamente desenvolvidos para classes específicas de materiais.

Dentre os vários modelos de histerese existentes, apenas o modelo SW possui um significado físico claro.⁽⁶⁾ O modelo SW representa a reversão magnética assumindo rotação coerente do vetor magnetização, para um monodomínio, sem interações entre as partículas e ainda, apresentando formato elipsoide. Por outro lado, Os modelos de Preisach e Jiles-Atherton são considerados puramente fenomenológicos. Em relação ao modelo de Jiles-Atherton, este se baseia na função tangente hiperbólica.⁽⁴⁾ Como é discutida por Takacs,⁽⁵⁾ a função tangente hiperbólica descreve bem formas histeréticas de aspecto sigmoide, sendo que o modelo de jiles-Atherton utiliza 5 parâmetros de ajuste.⁽⁴⁾ Considerando esta quantidade de parâmetros é bastante razoável que se alcance um ajuste satisfatório. Contudo, apesar de se utilizar como base a função tangente hiperbólica, o presente trabalho visa à representação de curvas de histerese empregando a menor quantidade de parâmetros de ajuste possível.

Como já citado anteriormente, a principal característica da função tangente hiperbólica é seu aspecto sigmoide, ou formato em 'S'. Esta peculiaridade contribuiu para que a função fosse escolhida como ponto de partida para o desenvolvimento de um modelo de ajuste de curvas histereses magnéticas. Tipicamente, os materiais magnéticos exibem ciclos de histerese em forma de 'S', desde que o campo aplicado seja alto suficiente para que a magnetização de saturação seja alcançada.

O gráfico da função tangente hiperbólica possui algumas peculiaridades, como o fato de contemplar metade da curva de histerese indicando uma condição de simetria (função ímpar). Sendo esta simetria relacionada ao eixo y . Por este motivo, há a possibilidade de o ajuste ser feito em meia histerese. A Figura 1 ilustra o gráfico da função tangente hiperbólica. É perceptível a forma sigmoide da curva, e ainda sua condição de simetria.

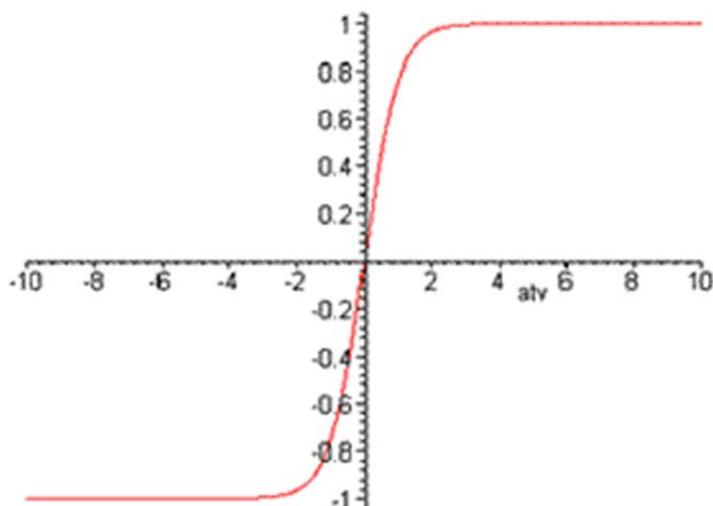


Figura 1. Gráfico da função tangente hiperbólica.

Porém, ao utilizar somente a função tangente hiperbólica não seria possível a realização de um ajuste aceitável, logo se torna necessária a introdução de parâmetros à função, a fim de conferir maior precisão ao modelo. No total foram inseridos três parâmetros à equação original, sendo eles: k , a e n .

Equação original da função tangente hiperbólica:

$$y = \tanh(x) \quad (1)$$

Equação final do modelo, após a introdução dos parâmetros:

$$y_{n+1} = n \tanh [k(x+y_n) - a] \quad (2)$$

Com a Equação 2 é possível ajustar curvas de histerese de materiais que apresentem ciclos com aspecto sigmoide. O modelo foi empregado em laços de histerese experimentais de amostras do material somaloy 550.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Material

Foram utilizadas curvas de histerese do material Somaloy 550, da marca Höganäs. As amostras utilizadas apresentam valores de densidade distintos e foram classificadas da seguinte forma:

Tabela 1. Classificação das amostras Somaloy 550

Classificação	Densidade (g.cm ⁻³)
8692	7,0
8693	7,1
8694	7,2
8695	7,3
8696	7,4

Todas as amostras foram compactadas e submetidas ao processo de queima a 350°C e tratamento térmico a 550°C, a fim de aliviar as tensões introduzidas no material durante o processo de compactação.

2.2 Elaboração da Equação

Utilizando-se a função tangente hiperbólica como núcleo, introduziram-se os parâmetros necessários à otimização do modelo.

A partir da equação original (Equação 1), foram adicionados os parâmetros k e a . O parâmetro a atua reduzindo os valores de x dentro da função, ao passo que o parâmetro k multiplica este valor. Optou-se pelo sinal negativo para preceder ao parâmetro a , pelo fato de que este se adequou melhor aos ajustes em relação ao sinal positivo. Com isso, pode-se observar um aumento na sinuosidade da curva de histerese teórica, aproximando-se da curva experimental. Sendo assim, a equação torna-se:

$$y = \tanh (kx - a) \quad (3)$$

Entretanto, apesar da introdução dos dois parâmetros, a curva teórica ainda não é capaz de manifestar a inclinação desejada, característica das curvas experimentais. Portanto, fez-se a combinação da equação descrita acima com a equação do modelo de Callen-Liu-Cullen. Existem relatos a respeito do uso da equação do modelo CLC juntamente com o modelo de Stoner-Wohlfarth, contudo neste trabalho comprova-se que também é possível combiná-la a outros modelos matemáticos, a fim de se alcançar a inclinação desejada.

Equação do modelo de CLC:

$$h_{CLC} = h_{SW} + (1/d) m \quad (4)$$

Sendo: h_{CLC} = campo reduzido no modelo CLC; h_{SW} = campo reduzido no modelo SW e d é um parâmetro relacionado à inclinação da curva de magnetização.

Reorganizando a equação em termos das coordenadas x e y tem-se:

$$x' = x + (1/d) y_n \quad (5)$$

Após combinação com a equação da tangente hiperbólica modificada (apenas substituindo x por x'):

$$Y_{n+1} = \tanh [k (x+y_n/d) - a] \quad (6)$$

Deste modo, ocorreu a introdução do parâmetro d . Após inúmeros ajuste constatou-se que este parâmetro é desnecessário, visto que em 100% dos casos manteve-se constante e igual a 1. Diante deste resultado, o parâmetro d foi retirado da equação sem prejuízo ao modelo.

Vale ressaltar que cada cálculo depende do resultado anterior, pois a equação está implícita. Logo, os cálculos são iterativos até a sua convergência. Com isso a equação torna-se:

$$Y_{n+1} = \tanh [k (x+y_n) - a] \quad (7)$$

Após todas as modificações descritas houve uma melhora significativa nos ajustes, entretanto vale lembrar que a função tangente hiperbólica possui um contra domínio restrito ao intervalo $[-1,1]$. Sendo assim, é necessário ampliar este intervalo, a fim de aumentar a precisão do ajuste. Por este motivo, um terceiro parâmetro foi adicionado, ou seja, o parâmetro n . Este possui a função de ampliar o quanto for necessário os valores de y , funcionando como um fator de escala. A partir da introdução de n , obtém-se a equação final do modelo da Tangente Hiperbólica.

$$y_{n+1} = n \tanh [k (x+y_n) - a] \quad (2)$$

Após a concepção da equação final do modelo da Tangente Hiperbólica, o ajuste foi realizado no *Origin® 6.0*, com ‘chutes’ iniciais iguais a 1 para todos os parâmetros. Assim, foram gerados os valores dos parâmetros do modelo. Para cada parâmetro um significado físico foi atribuído de acordo com sua influência no aspecto do ciclo de histerese.

Tabela 2. Parâmetros relativos ao modelo da tangente hiperbólica

Parâmetro	Significado físico
k	Permeabilidade magnética
a	-
n	Saturação magnética

Ao parâmetro a ainda fora atribuído nenhum sentido físico, visto que sua análise requer um volume maior de dados para a correta interpretação de sua função em relação aos seus efeitos no ciclo de histerese.

3 RESULTADOS

A partir de dados experimentais foram gerados ciclos de histerese característicos do material Somaloy 550, lembrando que as amostras diferem entre si pelo valor da densidade. Vale ressaltar que todas as curvas apresentam aspecto sigmoide característico. A modelagem foi realizada por intermédio do uso da equação da Tangente Hiperbólica, com adaptações (Equação 2). A seguir estão representadas as curvas do modelo superpostas às curvas experimentais:

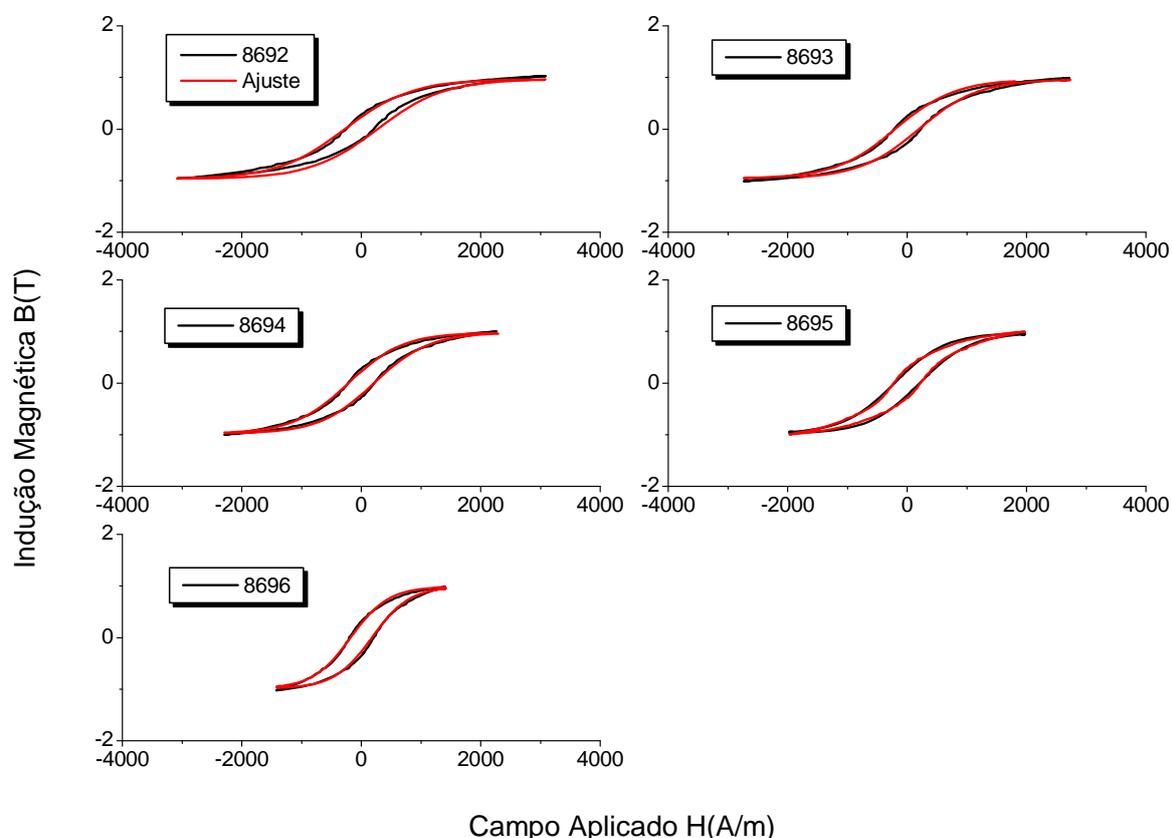


Figura 2. Ajuste dos ciclos de histerese do material Somaloy.

Os parâmetros gerados pelo modelo encontram-se na Tabela 3:

Tabela 3. Parâmetros obtidos pelo modelo da tangente hiperbólica adaptada, relativos às amostras do material Somaloy

	8692	8693	8694	8695	8696
<i>k</i>	0,00089	0,001	0,0011	0,00117	0,00158
<i>a</i>	-271	-199	-214	-211	-178
<i>n</i>	0,96625	0,96004	0,97799	0,97756	0,98701

4 DISCUSSÃO

É bastante perceptível o fato de que a densidade mostrou-se como um fator determinante em relação à forma dos ciclos de histerese. Quanto menor a densidade, maior será a presença de campos desmagnetizantes internos. Isto ocorre porque amostras com densidades menores possuem maior massa de polímeros e, conseqüentemente, maior porosidade, o que facilita a ocorrência de campos desmagnetizantes produzidos pela fase não magnética. O resultado deste fenômeno manifesta-se no aspecto da curva de histerese que apresenta inclinação superior a de materiais mais densos. A presença de porosidade favorece as perdas histeréticas, bem como há redução na permeabilidade magnética.⁽⁷⁾ Este efeito geralmente é atribuído aos espaços existentes entre as partículas de ferro favorecendo o surgimento dos campos desmagnetizantes.⁽⁸⁾ A amostra 8696 (mais densa) possui a histerese de menor área, confirmando a ideia de que quanto maior a fração volumétrica de ferro no material menores serão as perdas. E ainda, a camada de revestimento na qual as amostras foram submetidas também pode interferir, ocasionando aumento da coercividade e das perdas histeréticas.⁽⁷⁾

Pode-se observar que o modelo ajustou-se bem aos dados experimentais, evidenciando sua compatibilidade com as curvas de histerese sigmóides. Porém, o ajuste da amostra 8692 apresentou o menor desempenho, pois as perdas histeréticas e campos desmagnetizantes internos causaram alterações significativas no ciclo, aumentando a inclinação da curva experimental. Isto causou pequena discrepância entre o ajuste e os dados experimentais. De fato, a amostra possui a maior massa de polímeros dentre todas (ou menor fração volumétrica de ferro), o que favorece o surgimento de fatores responsáveis pela modificação dos laços. Inclinações mais evidentes resultam em leves deformidades em relação ao ajuste.

Analisando os parâmetros (Tabela 3) pode-se observar que o parâmetro *k* aumenta na medida em que é aumentada a densidade do material e está relacionado à inclinação exibida pela curva. Materiais mais densos geram curvas menos inclinadas. Na função tangente hiperbólica isto significa que o valor de *k* deve ser aumentado para proporcionar um aumento em *y*, ou seja, um aumento gradativo na resposta à excitação, *m*, garantindo curvas com inclinações menores. Em termos físicos, o parâmetro *k* reflete a permeabilidade magnética do material, ou seja, à capacidade que a amostra possui em amplificar o campo magnético externo aplicado. De fato, quanto maior a fração volumétrica de ferro no material (menor porosidade), maior será a permeabilidade, o que justifica o aumento de *k* com a densidade.

O parâmetro *a* aumenta à medida que a densidade do material é aumentada. Este parâmetro poderia estar relacionado à permeabilidade magnética no caso do material Somaloy, porém novos dados referentes a outros materiais devem ser interpretados a fim de que se produzam informações mais concisas a respeito da função deste parâmetro. Em relação ao aspecto da curva, o parâmetro *a* é utilizado

para complementar o ajuste e também se relaciona à inclinação exibida pela curva resultante.

Portanto, na função Tangente Hiperbólica adaptada, o parâmetro a juntamente com o parâmetro k regulam a resposta y , garantindo a flexibilidade do ajuste em relação à curva experimental.^(9,10) Na prática, indicam a ocorrência de campos desmagnetizantes internos, porosidade das amostras e/ou presença de imperfeições no sólido, ou seja, estão relacionados a fatores que aumentam as perdas histeréticas.

O último parâmetro adicionado, ou seja, o parâmetro ' n ' possui a função de promover a continuidade da curva teórica além do limite estabelecido pela função tangente hiperbólica, que varia entre $[-1,1]$. Desta forma, garante-se que as extremidades das curvas também sejam contempladas pelo ajuste. O parâmetro ' n ' aproxima-se de 1 em todos os casos. Isto indica, tão somente, que os dados relativos à ordenada encontram-se nas proximidades do intervalo $[-1,1]$. Baseando-se no sentido físico, este parâmetro relaciona-se à saturação magnética do material. Os valores obtidos encontram-se em um intervalo bastante estreito, indicando a similaridade das amostras a respeito desta grandeza. De fato, as amostras pertencem a uma mesma classe de materiais (com densidades diferentes, porém próximas). Isto justifica a semelhança entre os dados relativos à saturação magnética, visto que esta propriedade está intimamente ligada à composição química do material.⁽⁷⁾

5 CONCLUSÃO

A função tangente hiperbólica, quando alterada pela introdução de parâmetros e ainda, inspirada no modelo CLC, é capaz de descrever, de forma satisfatória, curvas de histerese magnética obtidas a baixas frequências de campo aplicado e que apresentem aspecto sigmoide. A quantidade de parâmetros utilizados neste modelo é bastante apreciável, apenas 3. Isto constitui uma grande vantagem em relação aos demais modelos matemáticos. Porém, nos casos em que o material possua em sua composição substâncias responsáveis por aumento de porosidade, como por exemplo, polímeros, ocorrem discrepâncias mínimas no ajuste, entretanto não há decréscimo na eficácia do modelo. Materiais porosos ou processados têm seu ciclo de histerese modificado, principalmente em relação à inclinação da curva.

O modelo da Tangente Hiperbólica é ágil e de fácil aplicação, o que torna seu uso atrativo e recomendável.

Agradecimentos

F.A.S. da Silva agradece ao CNPq pela bolsa de doutorado. M.F. de Campos agradece ao CNPq. D. Rodrigues agradece a Capes. Os autores agradecem Faperj, CNPq, Capes.

REFERÊNCIAS

- 1 STONER, E.C.; WOHLFARTH, E.P. Interpretation of High Coercivity in Ferromagnetic Materials. *Nature*. v. 160, n. 4071, p. 650-651, nov. 1947.
- 2 STONER, E.C.; WOHLFARTH, E.P. *Trans. Royal Soc. London* v. A240 (1948), p. 599.
- 3 CHIKAZUMI, S. *Physics of Magnetism*. (Robert E. Krieger Pub. Company. Malabar Florida, 1984).

- 4 JILES, D.C. ATHERTON, D.L. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 61, 1986, pp. 48-60.
- 5 TAKACS, J. Mathematics of hysteretic phenomena: the T(x) model for the description of Hysteresis. (2003 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim).
- 6 CAMPOS, M. F.; ROMERO, S. A.; LANDGRAF, F. J. G.; MISSEL, F. P.: Journal of Physics: Conference Series, Vol. 303 (2011), p. 012049.
- 7 CASTRO, N. A. *et al.* Dificuldades na Aplicação de Pós de Ferro Microencapsulados em Substituição a Aços Elétricos de Grão Não Orientado. 59^o Congresso Anual da ABM. São Paulo, julho de 2004.
- 8 CASTRO, N. A.; LANDGRAF, F.J.G. Porosity and Magnetic Losses in Soft Magnetic Composites. Disponível em:
<<http://www.pmt.usp.br/academic/landgraf/nossos%20artigos%20em%20pdf/03cas%20s mm%20powd.pdf>>. Acesso em: 14 de maio de 2011.
- 9 SILVA, F.A.S.; DE CAMPOS, M.F. (in press). A Model for The Hysteresis of Soft Magnetic Materials. Eighth International Latin-American Conference on Powder Technology. Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.
- 10 SILVA, F.A.S.; Desenvolvimento de Modelos Matemáticos para Ajuste de Curvas de Histerese Magnética. Dissertação. Defesa em 06 de Setembro de 2011. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ.