

EFEITO DAS VARIÁVEIS DE PROCESSO NA CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE DURANTE A REFUSÃO POR ELETROESCÓRIA ¹

Sidinei Colodeti Cristo²
Marcelo Aquino Martorano³

Resumo

Um modelo matemático para o processo de refusão por eletroescória (ESR - "electroslag remelting") sob condições transientes foi implementado. Neste modelo, a equação diferencial de condução de calor em coordenadas cilíndricas para regime transiente e considerando a mudança de fase líquido-sólido foi utilizada. A resolução numérica da equação diferencial foi facilitada através de uma mudança de variável que possibilitou fixar-se o tamanho do domínio de cálculo durante o período de crescimento do lingote. Esta equação diferencial foi escrita na forma adimensional, indicando os parâmetros adimensionais importantes para o processo. Realizou-se um estudo paramétrico do modelo examinando-se o efeito de algumas variáveis de processo na geometria da poça de fusão, no tempo local de solidificação (LST) e no comprimento do lingote necessário para o sistema atingir regime estacionário. As variáveis de processo escolhidas para a análise foram: (1) a taxa de refusão; (2) o tipo de material refundido e (3) as condições de extração de calor pelo molde refrigerado. Os resultados mostraram que não é possível definir, para todas as condições industriais, uma única razão entre o comprimento e o raio do lingote no momento em que a poça de fusão atinge estado estacionário. Observou-se ainda que o número de Stefan, que define o tipo de material, tem efeito desprezível na profundidade da poça de fusão e no tempo local de solidificação quando atinge valores maiores do que 0.5.

Palavras-chave: Refusão por eletroescória; Modelagem matemática.

EFFECT OF PROCESS PARAMETERS ON THE TRANSIENT HEAT TRANSFER HEAT DURING THE ELECTROSLAG REMELTING

Abstract

The present paper presents a mathematical model for the electroslag remelting process (ESR) under transient conditions. In this model, the energy equation considering transient heat conduction and phase change in cylindrical was solved numerically to model the heat transfer in the solidified ingot and liquid metal pool. To facilitate the procedure for the numerical solution during ingot growth, the axial coordinate of the cylindrical system was transformed to fix the calculation domain size. A parametric study of the proposed model was carried out to analyze the effect of (1) the melting rate, (2) the type of solidifying material, and (3) the heat extraction by the mold. The effects of these variables were analyzed on the liquid metal pool depth, on the local solidification time (LST), and on the ingot height necessary for the liquid metal liquid to reach steady-state. The model results show that it is not possible to define a unique ratio between the ingot height and ingot diameter in which steady state is reached for all industrial processing conditions. It was also observed that the Stefan number, which defines the type of solidifying material, had a negligible effect on the pool depth and on the LST for values larger than 0.5.

Key words: Electroslag remelting; Mathematical modeling.

¹ Trabalho apresentado no XXXVII Seminário de Aciaria - Internacional, 21 a 24 de maio de 2006, Porto Alegre, RS

² Engenheiro de Processos da Aciaria da Villares Metals S.A.

³ Professor do Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

1 INTRODUÇÃO

O processo de refusão por escória eletrocondutora (ESR – “electroslag remelting”), ou eletroescória, mostrado esquematicamente na Figura 1, tem como objetivo obter produtos de alta qualidade sob o ponto de vista de composição química, nível de inclusões, macrossegregação e de estrutura bruta de solidificação. Tais características são essenciais para superligas e aços especiais que geralmente são utilizadas em aplicações de alta responsabilidade, requerendo propriedades mecânicas não adquiridas através de outros processos. ⁽¹⁾

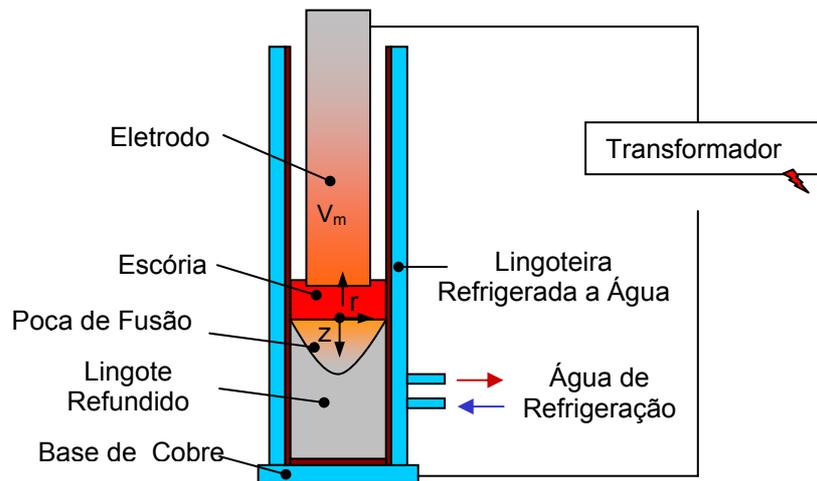


Figura 1. Desenho esquemático do forno ESR, onde V_m é a velocidade de aumento do comprimento do lingote.

O processo consiste em inicialmente refundir um eletrodo sólido através do aquecimento de uma escória eletrocondutora por efeito Joule com a passagem de corrente elétrica. O metal líquido do eletrodo atravessa a escória e deposita-se na poça de fusão, posteriormente solidificando em contato com uma lingoteira de cobre refrigerada a água. Durante este processo o lingote solidificado aumenta continuamente de comprimento com velocidade V_m . A determinação da influência das variáveis de processo na qualidade do produto é de fundamental importância para a otimização do processo. Modelos matemáticos têm sido desenvolvidos e utilizados para esta otimização, procurando estabelecer condições de equilíbrio entre a produtividade e a excelência microestrutural do produto. ⁽¹⁻⁸⁾

Entre os aspectos que já foram modelados matematicamente no processo ESR estão: a convecção nas fases líquidas (escória e metal), ⁽²⁻⁵⁾ que tem grande importância na determinação dos campos térmicos e de velocidades; a macrossegregação, ^(6,7) permitindo a previsão da segregação em A e em V (“freckles”) e, finalmente, o formato da poça de metal líquido e o tempo local de solidificação (LST - “local solidification time”), definido como o período de tempo necessário para que um ponto do material resfrie da temperatura liquidus até a solidus ⁽⁸⁾. O LST está diretamente associado ao espaçamento médio entre os braços secundários de dendritas, que por sua vez está diretamente relacionado às propriedades mecânicas do material. ⁽⁹⁾

Uma das dificuldades inerentes à modelagem matemática do regime transiente do processo ESR está associada ao domínio de cálculo crescente, pois o tamanho do lingote em solidificação aumenta continuamente. Autores como

Ballantyne e Mitchell⁽⁸⁾ utilizaram uma técnica de malha adaptativa, na qual a malha numérica para resolução das equações era constantemente reajustada para sempre abranger todo o lingote.

O presente trabalho tem como objetivo propor um modelo matemático para o processo de refusão por eletroescória sob condições transientes e aplicar este modelo para examinar o efeito de alguns parâmetros de processamento no formato da poça de fusão, no tempo local de solidificação e na extensão do período de regime transiente. Os parâmetros de processamento escolhidos para a análise foram: (1) a taxa de refusão dos eletrodos; (2) o tipo de material refundido e (3) as condições de extração de calor pelo molde refrigerado. Em lugar da técnica de malha adaptativa apresentada por Ballantyne e Mitchell,⁽⁸⁾ no presente trabalho utilizou-se uma transformação de variável, denominada de transformação de Landau,⁽¹¹⁾ através da qual o domínio real crescente é transformado em um domínio de cálculo fixo. Esta transformação simplificou o processo de solução numérica da equação diferencial, permitindo a utilização de uma malha de nós e volumes de tamanho fixo.

No próximo item o modelo será apresentado, seguindo-se de sua verificação e análise do efeito do tamanho da malha. Posteriormente as condições de simulação e os resultados principais serão apresentados e discutidos.

2 MODELO MATEMÁTICO

Um modelo matemático foi implementado para simular a condução de calor transiente durante a etapa de solidificação no processo de refusão por eletroescória. Utilizou-se a equação de condução de calor contendo um termo fonte que considera a liberação de calor latente relativa à mudança de fase líquido-sólido. Adotou-se um sistema de coordenadas cilíndricas fixo na interface metal-escória, como mostra a **Figura 1**, e movimentando-se na direção ascendente com uma velocidade igual à de aumento do comprimento do lingote, V_m . Considerando-se ainda que o campo de temperaturas é simétrico em relação ao eixo longitudinal do lingote em solidificação, a equação diferencial final utilizada para a modelagem foi

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p V_m \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + L_f \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_m \varepsilon_s) \right) \quad [1]$$

onde T é a temperatura; t é tempo; z e r são as coordenadas longitudinais e radiais do sistema de coordenadas indicado na **Figura 1**; ρ , c_p , κ e L_f são a densidade, o calor específico, o calor latente de fusão e a condutividade térmica, respectivamente, do material refundido. Assumiu-se que a fração de sólido, ε_s , varia linearmente entre as temperaturas liquidus e solidus, ou seja, $\varepsilon_s = (T_L - T)/(T_L - T_S)$, onde T_L e T_S são, respectivamente, as temperaturas liquidus e solidus. O último termo ao lado esquerdo da equação [1] representa o transporte de calor por advecção resultante da movimentação do topo do lingote. Por outro lado, o último termo à direita da equação representa a liberação de calor latente devido à solidificação.

A condição inicial e as de contorno adotadas para o domínio do lingote foram

Condição Inicial

$$T = T_T \quad 0 < r < R, 0 < z < L_0, t = 0 \quad [2]$$

Condições de Contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_m (T - T_a) \quad r = R, 0 < z < L, t > 0 \quad [3]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, 0 < z < L, t > 0 \quad [4]$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} = h_b (T - T_a) \quad 0 < r < R, z = 0, t > 0 \quad [5]$$

$$T = T_T \quad 0 < r < R, z = 0, t > 0 \quad [6]$$

onde T_T é a temperatura no topo do lingote; h_b e h_m são os coeficientes de transferência de calor na interface metal-lingoteira na região da base e da lateral do lingote, respectivamente; T_a é a temperatura da água de refrigeração da lingoteira; R é o raio do lingote; L é o comprimento instantâneo do lingote e L_0 é o comprimento inicial do lingote.

Note que, no contorno superior (Eq. [6]), localizado na interface metal-escória, foi considerada uma temperatura fixa fornecida, analogamente ao trabalho de Ballantyne e Mitchell.⁽⁸⁾ Nos contornos laterais em contato com a lingoteira e no contorno inferior em contato com a base, o fluxo de calor foi modelado utilizando coeficientes de transferência de calor.

O domínio de cálculo engloba uma seção longitudinal do lingote em solidificação. O comprimento deste lingote, $L = L(t)$, aumenta continuamente com o tempo e, portanto, a transformação de Landau⁽¹¹⁾ foi utilizada para transformar o domínio real de comprimento variável em um domínio computacional de comprimento fixo. Esta transformação consiste na seguinte mudança de variáveis

$$z^* = \frac{z}{L(t)} \quad [7]$$

onde L é o comprimento instantâneo do lingote, definido por $L = V_m \cdot t + L_0$, sendo que V_m é a velocidade de crescimento do comprimento do lingote e L_0 é o comprimento inicial do lingote.

Escrevendo a Eq. [1] em função da nova variável independente, z^* , tem-se:

$$\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p V_m \frac{\partial T^*}{\partial z^*} (1 - z^*) \right) = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k \frac{\partial T}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + L_f \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + (1 - z^*) \frac{V_m}{L(t)} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} \right) \quad [8]$$

Comparando-se as Eqs. [1] e [8], nota-se que a transformação modificou principalmente o último termo à esquerda e o penúltimo termo à direita da equação. Esta transformação resultou em um domínio de cálculo cuja variável z^* varia de 0 até 1, qualquer que seja o tamanho instantâneo do lingote. Desta forma, eliminou-se a inconveniência de se utilizar uma malha de tamanho variável para resolver numericamente as equações.

Com a finalidade de analisar o efeito das variáveis de processo de uma forma bastante ampla, a Eq. [8] e as suas condições inicial e de contorno também transformadas foram escritas na forma adimensional definindo-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$T^* = \frac{T - T_S}{T_L - T_S} \quad [9], \quad L^* = \frac{L(t)}{R} \quad [10], \quad r^* = \frac{r}{R} \quad [11] \quad \text{e} \quad t^* = \frac{t \cdot \alpha}{R^2} \quad [12]$$

onde α é a difusividade térmica, dada por $\alpha = \kappa / (\rho c_p)$.

Utilizando estas variáveis adimensionais, a equação diferencial e suas condições inicial e de contorno foram transformadas para:

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Pe \cdot \frac{1}{L^*} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial z^*} (1 - z^*) \right) = \frac{1}{L^{*2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{Ste} \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t^*} - Pe \cdot (1 - z^*) \frac{1}{L^*} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z^*} \right) \quad [13]$$

Condição Inicial

$$T = T_T^* \quad 0 < z^* < 1, 0 < r^* < R^*, t^* = 0 \quad [14]$$

Condições de Contorno

$$-\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = Bi_m \cdot (T^* - T_a^*) \quad r^* = R^*, 0 < z^* < 1, t^* > 0 \quad [15]$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad r^* = 0, 0 < z^* < 1, t^* > 0 \quad [16]$$

$$-\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = Bi_b \cdot (T^* - T_a^*) \quad 0 < r^* < R^*, z^* = 1, t^* > 0 \quad [17]$$

$$T = T_T^* \quad 0 < r^* < R^*, z^* = 0, t^* > 0 \quad [18]$$

onde o número de Peclét foi definido como $Pe = V_m \cdot R / \alpha$, representando uma forma adimensional para a taxa de refusão; o número de Stefan foi definido como $Ste = c_p \cdot (T_L - T_S) / L_f$, representando uma forma adimensional para o recíproco do calor latente do material; o número de Biot foi definido como $Bi = hR / \kappa$ e, finalmente, T_T^* e T_a^* são as temperaturas adimensionais no topo do lingote e da água de refrigeração, respectivamente.

As Eqs. [13] a [18] foram discretizadas através do método dos volumes finitos, formulação implícita, utilizando uma malha de tamanho fixo, contendo 400 volumes na altura e 20 volumes ao longo do raio. O sistema de equações algébricas resultante da discretização foi solucionado utilizando-se o método de Gauss-Seidel.⁽¹²⁾ O código computacional para execução destas tarefas foi construído utilizando-se a linguagem computacional ANSI C e um compilador Borland® C++ em um computador pessoal com processador Intel Celeron® 1,10GHz.

3 VERIFICAÇÕES INICIAIS E DEFINIÇÃO DA MALHA NUMÉRICA

Após a implementação do modelo matemático, foram feitas verificações através da comparação entre os seus resultados e as soluções analíticas para três diferentes problemas, a saber: (a) condução de calor transiente em um cilindro, (b) fusão de um cilindro de comprimento infinito com aplicação de uma fonte térmica na linha do eixo central e (c) condução de calor (sem mudança de fase) unidimensional em um domínio de comprimento crescente com o tempo. Todos os testes mostraram excelente aderência entre os resultados. Os maiores erros relativos encontrados nas temperaturas foram de 0,62%, 1,5% e 0,26% para os testes (a), (b) e (c), respectivamente.

Antes da obtenção dos resultados principais, realizou-se um teste de refino da malha numérica na direção z^* . Para tanto, observou-se que a evolução com o tempo da posição da isoterma solidus adimensional, T_S^* , não sofria alterações maiores do que 0,18% para uma malha com mais de 400 volumes na direção z^* . Além disso, observou-se que esta malha sempre garantia a presença de pelo menos 4 volumes no interior da zona pastosa na região central do lingote após o regime estacionário ter sido atingido. Portanto, uma malha de 20 (direção r) x 400 (direção z) volumes foi utilizada em todas as simulações.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo apresentado no item anterior foi utilizado para calcular o campo de temperaturas durante a solidificação dos lingotes no processo de refusão sob diferentes condições de transferência de calor na interface metal-lingoteira, diferentes materiais e diferentes velocidades de refusão. Estas condições foram alteradas, respectivamente, através da variação dos seguintes parâmetros adimensionais: Bi , Ste e Pe .

A definição das faixas de valores adotados para os parâmetros adimensionais durante as simulações foi feita objetivando-se abranger o máximo espectro de condições industriais, incluindo também materiais como alumínio, cobre e níquel, além dos aços. O mesmo valor de Bi foi utilizado para as interfaces entre o metal e a base e entre o metal e a lateral da lingoteira. As simulações foram encerradas no momento em que o lingote simulado atingiu um comprimento de 5 vezes o seu raio, momento em que a poça de fusão já havia atingido o regime estacionário.

A variação da profundidade adimensional da isoterma solidus, z_s^* , em relação ao topo do lingote na sua região central é apresentada na Figura 2 em função de Pe para valores de Bi iguais a 5,4 (linha contínua) e 50 (linha tracejada).

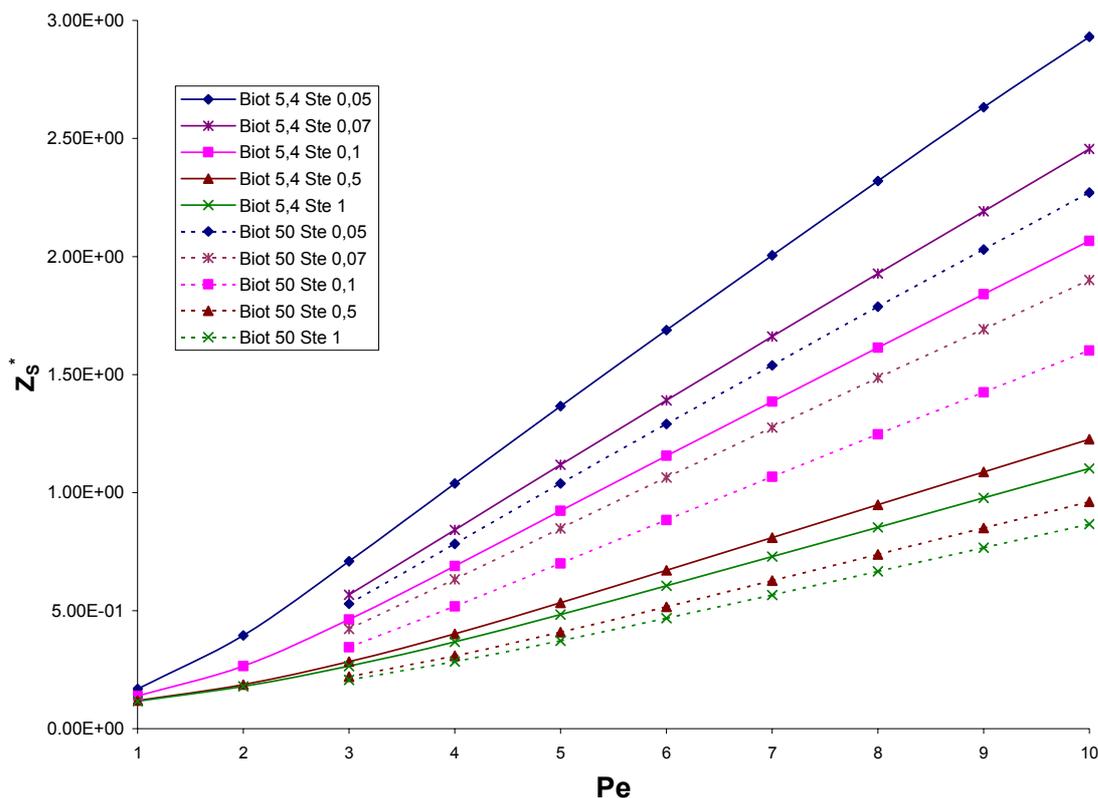


Figura 2. Profundidade adimensional da isoterma solidus, z_s^* , na região central do lingote em função de Pe para diferentes Ste e Bi .

Observa-se que a profundidade da poça, indicada por z_s^* , aumenta linearmente com o aumento de Pe na faixa de $Pe > 3$, independentemente dos valores de Ste e Bi . Quando $Pe < 3$, observa-se que as curvas tendem de forma

assintótica a uma reta horizontal, ilustrando que o efeito deste parâmetro torna-se cada vez menor. A Eq. [13] mostra que a diminuição de Pe decresce a importância dos termos que representam o transporte de calor por advecção. Desta forma, a transferência passa a ser controlada apenas pela condução radial e longitudinal, como se o lingote tivesse comprimento fixo.

Nota-se que um aumento de Ste também resulta no aumento da profundidade da poça de fusão; entretanto, este aumento torna-se menor para $Ste > 0.5$. Desta forma, pode-se concluir que o efeito da liberação do calor latente passa a ser desprezível nas dimensões da poça, quando $Ste > 0.5$. Conseqüentemente, o tipo de material refundido passa a afetar muito pouco a profundidade adimensional da poça de fusão nestes casos. Este aspecto está diretamente relacionado à diminuição da importância do termo fonte localizado à direita da Eq. [13], ou seja, tem-se o equivalente a um problema de condução pura, sem mudança de fase. A Figura 2 indica ainda que, para valores de $Pe < 1$, o tipo de material refundido, representado por Ste , também afeta muito pouco a profundidade da poça.

O tempo local de solidificação adimensional ($LST^* = LST \alpha / R^2$) calculado na região central do lingote está apresentado na Figura 3 em função de Pe para valores de Bi iguais a 5,4 e 50. Observa-se claramente um ponto de mínimo LST^* em função de Pe , ou seja, da taxa de refusão adimensional, para valores de $Ste < 0.1$. Este ponto de mínimo também foi observado nos resultados de Ballantyne e Mitchell⁽⁸⁾. Nota-se que a diminuição da importância do calor latente, ou seja, um aumento de Ste , causa um deslocamento do mínimo LST^* para valores cada vez maiores de taxa de refusão. Para $Ste \geq 0.5$, por exemplo, não parece existir um mínimo LST^* nas condições industrialmente possíveis.

Como observado para z_s^* , os valores de LST^* também passam a ser pouco afetados pelo calor latente de solidificação quando $Ste > 0.5$.

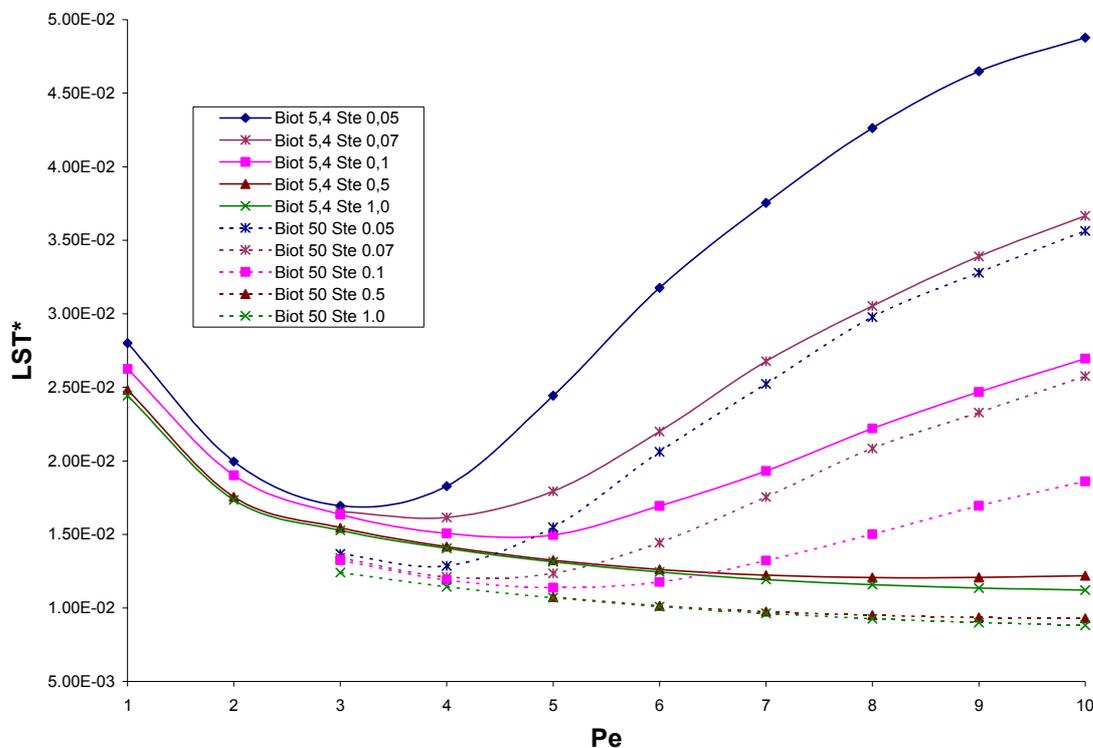


Figura 3. Tempo local de solidificação adimensional na região central do lingote em função de Pe para diferentes Ste e Bi .

O comprimento adimensional e instantâneo do lingote, $L^* = L/R$, no momento aproximado em que a poça de fusão atingiu o regime estacionário, denominado L_s^* , está apresentado na Figura 4 em função de Pe , para Bi igual a 5,4 e 50. Observa-se claramente que L_s^* aumenta com o aumento da taxa de refusão adimensional, ou seja, de Pe , e diminui na medida em que a extração de calor pelo molde torna-se mais severa, ou seja, com o aumento de Bi .

Estes resultados mostram que a regra normalmente adotada, sugerida por Takahama e Gammal⁽¹⁰⁾, de que o lingote deve ter um comprimento maior do que 3,5 vezes o seu raio para atingir o estado estacionário não pode ser aplicada em qualquer condição industrial. Na Figura 4 observa-se que este comprimento pode variar na faixa de aproximadamente 1.5 até 4.5, dependendo do material, da taxa de refusão e das condições de extração de calor. Por exemplo, o aumento da taxa de refusão resulta em um aumento aproximadamente linear do comprimento para se atingir o estado estacionário quando $Pe > 5$.

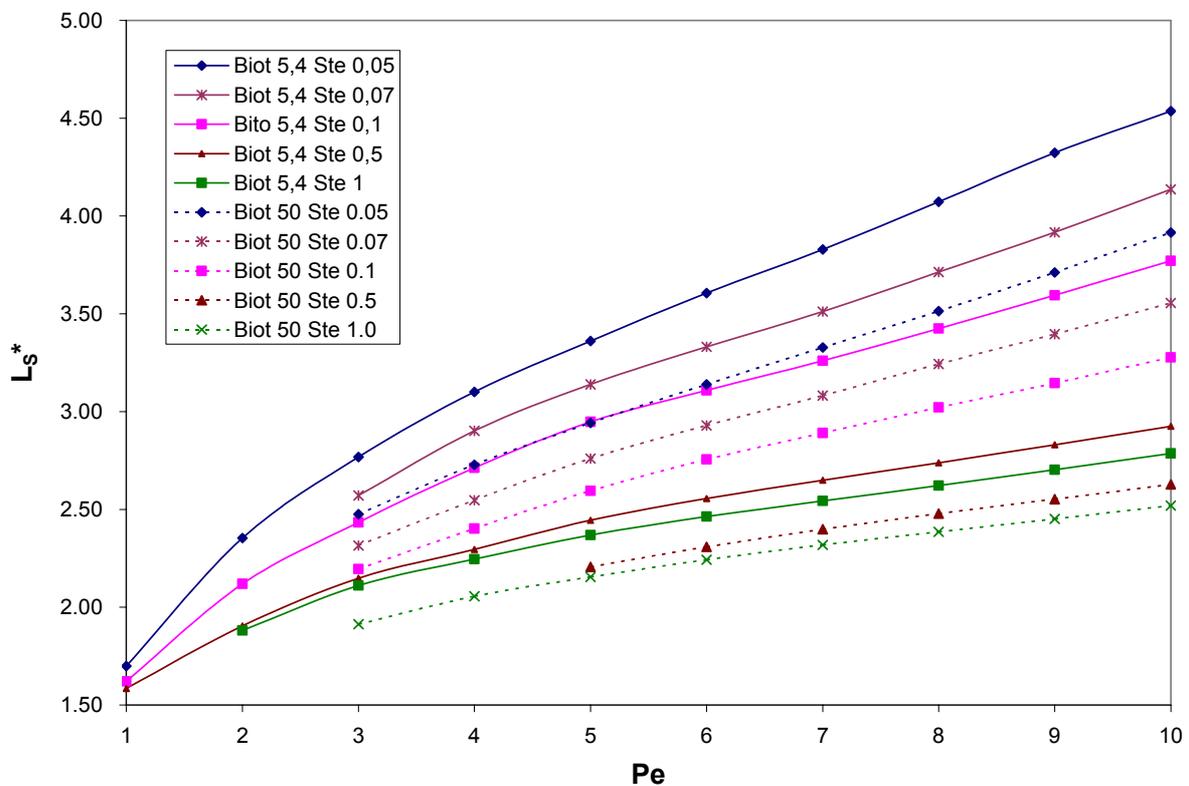


Figura 4. Comprimento adimensional do lingote no momento em que a poça de fusão atinge um regime estacionário, L_s^* , em função de Pe , para vários Ste e Bi .

A Figura 5 mostra a razão entre as profundidades adimensionais da isoterma solidus na linha central do lingote e a meio-raio em função de Pe , para Bi igual a 5,4 e 50. Esta razão possibilita uma quantificação do formato da poça de metal líquido. Observa-se que uma diminuição da taxa de refusão, ou seja, de Pe , resulta em uma poça cada vez menos côncava, contendo uma menor quantidade de metal líquido. Este formato de poça, que representa uma solidificação altamente direcionalizada, é desejável ao final do processo de refusão para minimizar as perdas causadas pela contração durante a solidificação do topo do lingote. Observa-se a existência de uma

concavidade máxima possível de ser atingida com o aumento da taxa de refusão, fixando-se o material (Ste) e as condições de extração de calor (Bi). Esta concavidade máxima é tanto maior quando mais severa a extração de calor através do molde, representada por Bi.

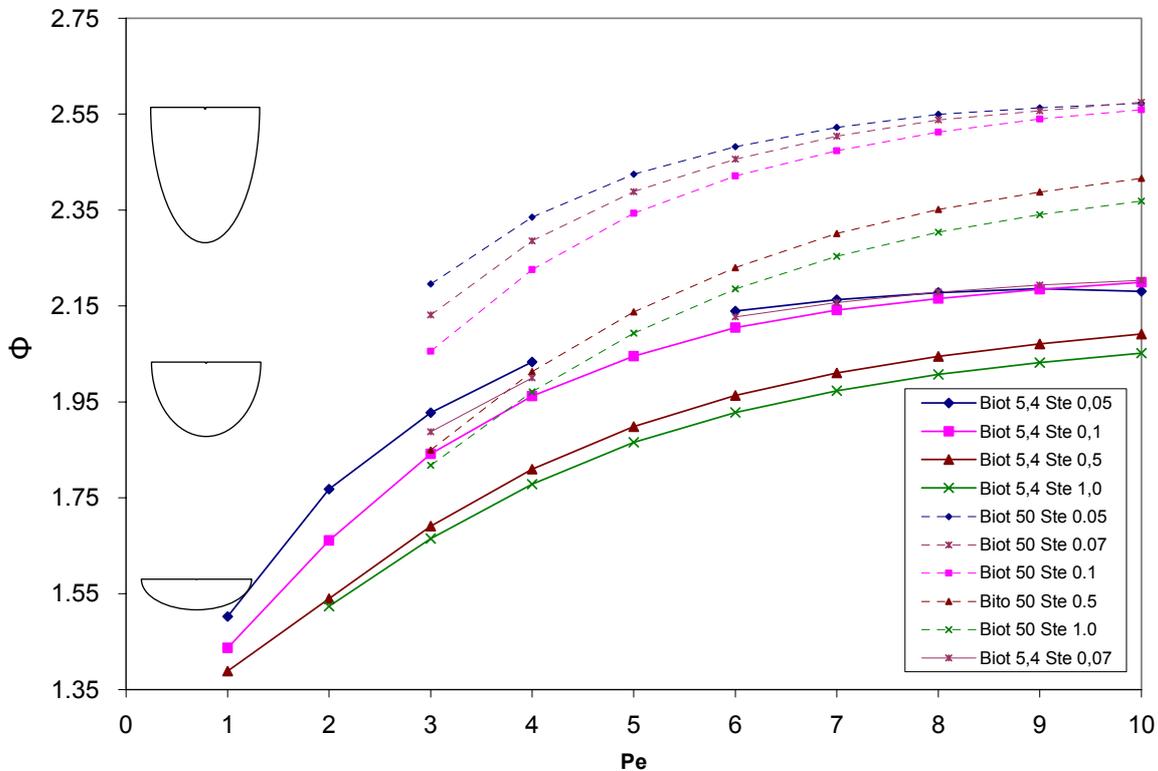


Figura 5. Razão, ϕ , entre as profundidades da isoterma solidus adimensional na região central e à meio-raio do lingote em função de Pe para vários Ste e Bi . Ao lado esquerdo estão apresentados desenhos esquemáticos do formato da poça para três razões diferentes.

5 CONCLUSÕES

As seguintes conclusões foram obtidas a partir do modelo matemático implementado no presente trabalho:

- 1- A profundidade da poça de fusão aumenta linearmente com o número de Peclet (Pe), que representa uma taxa de refusão adimensional, para valores de $Pe > 3$, porém sofre efeito desprezível para $Pe < 2$;
- 2- A profundidade adimensional da poça de fusão e o tempo local de solidificação (LST^*) são praticamente constantes para valores do número de Stefan maiores do que 0.5;
- 3- O LST^* apresenta um ponto de mínimo em função de Pe apenas em determinadas condições industriais;
- 4- A razão entre o comprimento do lingote e o seu raio no momento em que a poça de fusão atinge um regime estacionário aumenta com o aumento de Pe e com a diminuição de Bi , não sendo possível definir um único valor para todas as condições industriais, como sugerido na literatura.

REFERÊNCIAS

- 1 PLÖCLINGER, E. Electroslag Remelting – A Modern Tool in Metallurgy. **Journal of The Iron and Steel Institute**, p. 533-541, ago. 1973.
- 2 DILAWARI, A.H.; SZEKELY, J. Heat Transfer and Fluid Flow Phenomena in Electroslag Refining. **Metallurgical Transactions B** vol 9B, mar 1978, p. 77-86.
- 3 CHOUDHARY, M.; SZEKELY, J. The Modelling of Pool Profiles, Temperature Profiles and Velocity Fields in ESR Systems. **Metallurgical Transactions B** vol 11B, set 1980, p. 439-453.
- 4 CHOUDHARY, M.; SZEKELY, J. Modelling of Fluid and Heat Transfer in Industrial-Scale ESR System. **Ironmaking and Steelmaking** N. 5, 1981 p. 225-232.
- 5 FERNG, Y.M. ; CHIENG, C.C.; Pan, C. Numerical Simulations of Electro-Slag Remelting Process. **Numerical Heat Transfer Part A** vol 16, 1989, p. 429-449.
- 6 POIRIER, D.R.; FLEMINGS, M.C. ; MEHRABIAN, R.; KLEIN, H.J. Modelling Macrossegregation in Electroslag Remelted Ingots. In SAGAMORE ARMY MATERIALS RESEARCH CONFERENCE PROCEEDINGS, 25., 1981, Sagamore. New York: Plenum Press, 1981. p 277-317.
- 7 YU, K. O.; DOMINGUE, J. A.; MAURER, G.E.; FLANDERS, H.D. Macrossegregation in ESR and VAR Processes. **Journal of Metals**, January , 1986 p. 46-50.
- 8 BALLANTYNE, A.S.; MITCHELL, A. Modeling of Ingot Thermal Fields In Consumable Electrode Remelting Processes, **Ironmaking and Steelmaking**, N. 4, 1977. p. 222-239.
- 9 FLEMINGS, M.C. **Solidification Processing**. Massachusetts: McGraw-Hill. 1974. p.146-154.
- 10 TAKAHAMA, K. ; GAMMAL, T.E. In: SIXTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPECIAL MELTING, 1979, San Diego. April 1979 p. 556-568.
- 11 CRANK, J. Free and Moving Boundary Problems . Oxford, Clarendon Press, 1984. p.187.
- 12 PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Minnesota : Taylor & Francis, 1980. p. 62.