

ELABORAÇÃO DO MODELO DA SUPERELIPSE PARA AJUSTE DE CURVAS DE HISTERESE MAGNETICA¹

Fernanda Aparecida Sampaio da Silva²
Marcos Flávio de Campos³

Resumo

As figuras geométricas são muito úteis na descrição de formas. No campo do magnetismo, podem ser aplicadas na descrição de curvas de histerese magnética. Em especial, as elipses, quando têm sua equação parametrizada, são capazes de proporcionar ajustes precisos de ciclos de histerese obtidos em condições de alta frequência de campo aplicado. Nessas histereses, o fenômeno do efeito de frequência torna-se predominante e o aspecto da curva aproxima-se de uma elipse. Entretanto, a equação da elipse deve ser adaptada, pois caso contrário, a curva resultante apresentará disparidades em relação à curva experimental. Além disso, a fim de que a curva resultante manifeste uma inclinação típica dos ciclos de histerese experimentais utilizou-se a equação do modelo de Callen-Liu-Cullen. Após todas as transformações ocorridas na equação original da elipse, quatro parâmetros estão presentes na equação final, o modelo da *Superelipse*. A cada um deles um significado físico está atribuído. Foram ajustadas curvas de histerese de amostras de aço 1011, 1015 e 1048. Os ajustes realizados mostraram-se precisos para todos os ciclos de histerese.

Palavras-chave: Superelipse; Histerese; Ajuste.

DEVELOPMENT OF SUPERELIPSE MODEL FOR HYSTERESIS CURVES ADJUSTMENTS

Abstract

The geometric figures are very useful to describe forms. About magnetism, the geometric forms can be applied in the description of magnetic hysteresis curves, in particular, ellipses. When ellipse's equation is parameterized it is possible to get accurate adjustments, whereas the hysteresis curves were obtained under high frequency conditions of external magnetic field. In this hysteresis, the phenomenon of frequency effect becomes predominant and the appearance of the curve approximates an ellipse. However, ellipse equation must be adapted; otherwise, the resulting curve is not similar to experimental curve. Furthermore, it is necessary using the equation of Callen-Liu-Cullen model in order to the resulting curve shows an inclination. This characteristic is typical experimental hysteresis. After all the transformations in the original ellipse equation, four parameters are present in the final model, the Superellipse Model. Each one is assigned a physical meaning. Hysteresis curves from steel samples (1011, 1015 and 1048) were adjusted. The adjustments were accurate for all hysteresis cycles.

Key words: Superellipse; Hysteresis; Adjustment.

¹ Contribuição técnica ao 67^o Congresso ABM - Internacional, 31 de julho a 3 de agosto de 2012, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

² Engenheira Química. M.Sc. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.

³ Engenheiro Metalúrgico. Prof. D.Sc. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.

1 INTRODUÇÃO

O autor e inventor dinamarquês Piet Hein ao observar formas elípticas concluiu que seria possível a existência de uma forma intermediária, com bastante aplicabilidade, entre o retângulo (ou quadrado) e a elipse. A motivação de Hein foi definida por uma missão que havia recebido do governo da cidade de Estocolmo, em 1959. Sua tarefa era propor uma forma conveniente a ser dada para delimitar uma rotatória em um novo espaço decorativo e estrategicamente arquitetado no centro da cidade. Após algumas reflexões, constatou que um quadrado teria a vantagem de tornar a rotatória paralela aos lados do quadrado. Por outro lado, um círculo seria o mais indicado, visto que garantiria a fluidez no trânsito. No entanto, Piet Hein teve a ideia de obter uma forma geométrica a partir da combinação das duas anteriormente citadas e ainda, que possuísse embasamento matemático. Hein inspirou-se na fórmula geral da elipse:⁽¹⁾

$$(x/a)^2+(y/b)^2=1 \quad (1)$$

Por intermédio de experimentos, percebeu-se que ao utilizar um expoente maior que o proposto (>2), a forma da figura resultante aproximara-se de um retângulo.⁽²⁾ A fim de potencializar a equação da elipse, Hein utilizou a propriedade de valor absoluto e incorporou à equação.

$$|x/a|^n+|y/b|^n=1 \quad (2)$$

Sendo a e b dois números positivos e n um número real.

Hein denominou todas as curvas cuja solução envolve o parâmetro n maior que 2 de *Superelipse*.

Em 1968, foi confeccionada uma tabela contendo a relação entre os valores do parâmetro n e seus efeitos nas principais formas *superelípticas*.

Tabela 1. Relação entre os valores do parâmetro n e as formas obtidas

Parâmetro n	Curva
2	Elipse comum (azul)
2,5	<i>Superelipse</i> (vermelha)
1	Losango (verde)

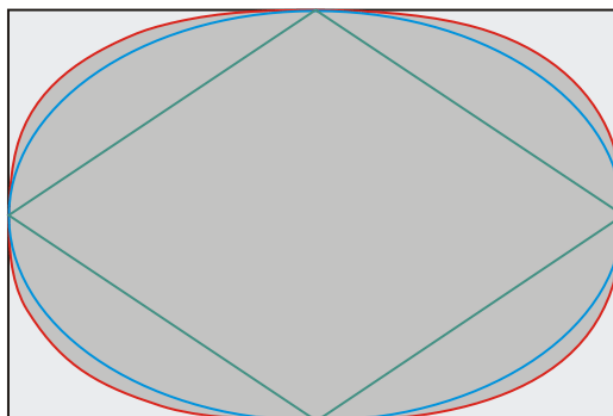


Figura 1. Principais formas geradas a partir da variação do parâmetro n na equação da *Superelipse*.

Quanto menor o valor de n , no caso de $n < 2$, mais a forma assemelhar-se-á a um losango, ao passo que quanto maior o valor n , a partir de $n > 2$, mais próximo do aspecto de um retângulo estará a figura geométrica resultante.

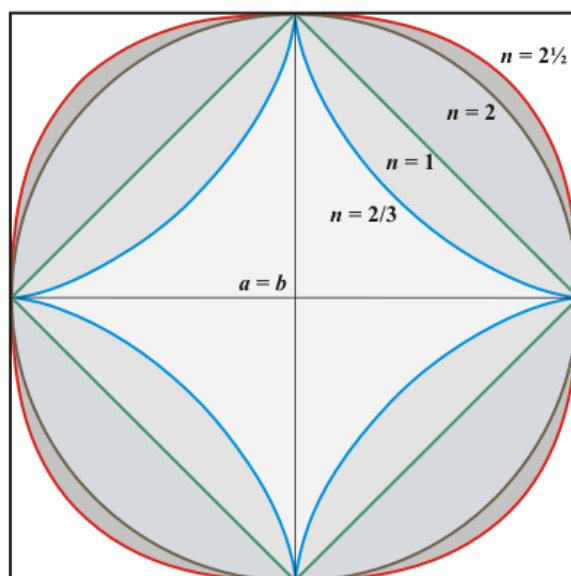


Figura 2. Efeito de diversos valores do parâmetro n na equação da *Superelipse*.

Portanto, o modelo da *Superelipse* é capaz de adequar-se bem a uma variedade bastante ampla de formas. Deste modo, é possível descrever um processo de magnetização/desmagnetização (pois o processo de desmagnetização também pode ser descrito como uma característica da histerese magnética^(3,4)) de um material ferromagnético partindo-se da equação da *Superelipse*. Isto porque, mesmo em condições quase-estáticas, há dissipação de energia envolvida no processo, ou seja, a parcela das perdas magnéticas por histerese não é nula. Este fenômeno é decorrente da movimentação de paredes e rotação de domínios magnéticos^(5,6) (mudança de direção cristalográfica⁽⁷⁾). Logo, a histerese é um fenômeno inerente ao processo de magnetização/desmagnetização e, caso possua aspecto elíptico, pode ser descrita pelo Modelo da *Superelipse*.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Material

Foram utilizados ciclos de histerese pertencentes às amostras de aço 1011, 1015 e 1048 como recebidas e também tratadas termicamente.

As amostras foram igualmente seccionadas em quatro partes e, posteriormente, realizaram-se tratamentos térmicos de austenitização, cementação, normalização e têmpera. Lembrando que para cada tratamento térmico uma amostra-controle foi gerada, ou seja, uma amostra representativa de cada tipo de aço manteve-se intacta, sem passar pelo tratamento térmico. Este procedimento foi necessário para que fossem feitas medidas magnéticas comparativas em relação à amostra recebida, lembrando que as propriedades magnéticas características do material dependem, fortemente, de sua composição química.^(8,9) A Figura 3 ilustra a forma como as amostras foram cortadas.⁽¹⁰⁾



Figura 3. Representação das amostras de aço 1011, 1015 e 1048 após o corte.

Realizou-se uma austenitização em todas as amostras. Este procedimento foi feito à temperatura de 850°C por 2 horas. Após o procedimento de austenitização, realizou-se o tratamento térmico de cementação. As amostras restantes foram expostas a uma atmosfera rica em monóxido e dióxido de carbono, a fim de permitir a difusão dos átomos de carbono para o interior do material. Este procedimento foi realizado à temperatura de 1050°C por oito horas. Após a cementação, foram realizados os procedimentos de normalização ou têmpera em banho de óleo.

A identificação das amostras segue o padrão indicado na Tabela 2:

Tabela 2. Identificação das amostras de aço 1011, 1015 e 1048

Grupo	Tratamento Térmico
1	Cementação e Têmpera
2	Cementação
3	Cementação e Normalização
4	Recebida

Vale ressaltar que, deste modo, todos os grupos contêm amostras que representam os três tipos de aço.

As medidas magnéticas foram todas realizadas a frequência de excitação de 20 Hz.

2.2 Elaboração do Modelo

Partindo-se da equação original da elipse, dois novos parâmetros foram introduzidos à equação, totalizando quatro na equação final do modelo. Vale lembrar que o modelo da *Superelipse* é apropriado às curvas obtidas a frequências significativas.

A seguir estão descrita todas as etapas envolvidas no processo de elaboração da equação final do modelo:⁽¹⁾

Considerando a equação original da elipse:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \quad (1)$$

Tomando-a em termos absolutos tem-se:

$$|x/a|^2 + |y/b|^2 = 1 \quad (3)$$

Ao substituir o expoente por qualquer outro número pertencente ao conjunto dos números reais observa-se uma significativa mudança na forma da elipse.⁽¹⁾ Logo, é conveniente modificar o valor fixo por um parâmetro, a fim de ampliar a capacidade de adequação do modelo. Portanto, a equação torna-se:

$$|x/a|^n + |y/b|^n = 1 \quad (2)$$

Sendo a e b dois números positivos e n um número real.

Com o objetivo de generalizar e facilitar o desenvolvimento do modelo torna-se necessária a parametrização da equação da elipse. Para isso, utilizou-se a seguinte identidade trigonométrica, bastante conhecida:⁽¹⁾

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \quad (4)$$

Cuja parametrização resulta:

$$x = \pm a |\cos(t)|^{2/n} \quad (5)$$

$$y = \pm b |\sin(t)|^{2/n} \quad (6)$$

A variável t foi executada de π a π gerando-se quatro *subcaminhos*, correspondentes a quatro combinações possíveis dos quadrantes, para que a figura da elipse seja formada.⁽¹⁾ A fim de agilizar o processo, podendo fazê-lo uma única vez, a função SGN foi utilizada, com isso a parametrização torna-se:

$$x(t) = a \operatorname{sgn}((\cos(t))(\operatorname{abs}(\cos(t)))^{2/n}), t \in [-\pi, \pi] \quad (7)$$

$$y(t) = b \operatorname{sgn}((\sin(t))(\operatorname{abs}(\sin(t)))^{2/n}), t \in [-\pi, \pi] \quad (8)$$

A partir das Equações 7 e 8 é possível obter a elipse na forma desejada. Contudo, a curva obtida apresenta-se isenta de qualquer inclinação, o que não contribui para que a histerese teórica seja similar à curva experimental. Isto porque as curvas de histereses magnética, na maioria dos casos, possuem uma inclinação relevante, que não pode ser negligenciada pelos modelos matemáticos.⁽³⁾

Uma alternativa para solucionar esta questão consiste em utilizar uma função similar a do modelo de Callen-Liu-Cullen (ou simplesmente modelo CLC).⁽³⁾

Equação do modelo de CLC:⁽¹¹⁾

$$h_{\text{CLC}} = h_{\text{SW}} + (1/d)m \quad (9)$$

Sendo: h_{CLC} = campo reduzido no modelo CLC, h_{SW} = campo reduzido no modelo SW e d é um parâmetro relacionado à inclinação da curva de magnetização.

Há relatos na literatura da utilização do modelo de CLC juntamente com o modelo de Stoner-Wohlfarth.⁽³⁾ Porém o princípio existente no modelo CLC pode ser

estendido aos demais modelos, como é o caso do modelo da *Superellipse*. Basta reorganizar a equação do modelo de CLC em termos das coordenadas x e y :

$$x' = x + (1/d)y_n \quad (10)$$

Com isso, produz-se a seguinte equação:

$$x(t) = a \operatorname{sgn}((\cos(t))(\operatorname{abs}(\cos(t)))^{2/n} + (1/d)y), t \in [-\pi, \pi] \quad (11)$$

O novo parâmetro, d , introduzido na equação, possui, portanto, a função de inclinar os ciclos de histerese.

As equações finais do modelo da *Superellipse* estão descrita a seguir:

$$x(t) = a \operatorname{sgn}((\cos(t))(\operatorname{abs}(\cos(t)))^{2/n} + (1/d)y), t \in [-\pi, \pi] \quad (12)$$

$$y(t) = b \operatorname{sgn}((\sin(t))(\operatorname{abs}(\sin(t)))^{2/n}, t \in [-\pi, \pi] \quad (8)$$

O parâmetro a é responsável por proporcionar o ajuste necessário em relação à largura dos laços de histerese e o parâmetro b relaciona-se a 'altura' do ciclo. O parâmetro n está diretamente ligado à forma exibida pela curva. E, ainda, o parâmetro d proporciona a inclinação necessária.^(3,11) Os parâmetros utilizados no modelo, além de estarem diretamente relacionados à estética das curvas, possuem significados físicos.

Em termos físicos, a relaciona-se ao campo coercivo, b à remanência, n refere-se ao histórico de tratamentos térmicos e/ou mecânicos realizados nas amostras, já que determina a forma mais provável dos ciclos, e d relaciona-se a possíveis obstáculos à movimentação das paredes de domínio magnético, ou ainda à presença de campos desmagnetizantes internos.

Em resumo:

Tabela 3. Relação de Parâmetros do Modelo da *Superellipse*

Parâmetro	Relação Física
a	Campo coercivo
b	Remanência
n	Tratamentos Realizados
d	Obstáculos à movimentação das paredes de domínio

Após a construção da equação final do modelo da *Superellipse*, o ajuste foi realizado no Microsoft Office Excel, gerando assim, os valores dos parâmetros do modelo.

3 RESULTADOS

Nas Figuras 4, 5 e 6 estão ilustrados os ajustes das curvas de histerese dos aços 1011, 1015 e 1048, respectivamente, pelo modelo da *Superellipse* (Equações 8 e 12):

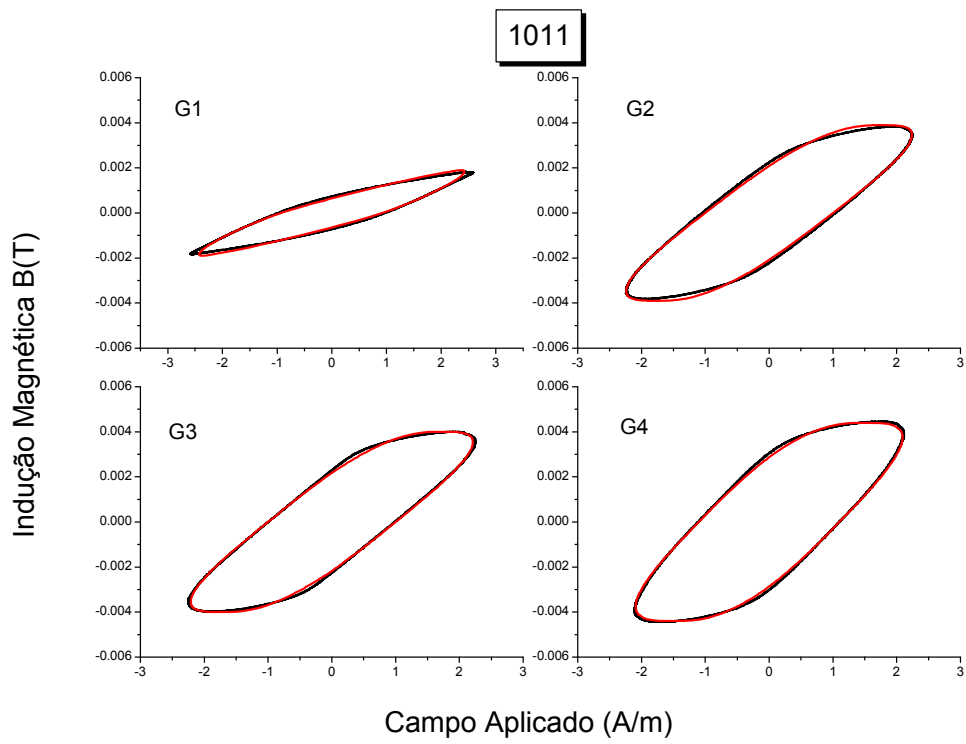


Figura 4. Ajuste dos ciclos de histerese das amostras de aço 1011.

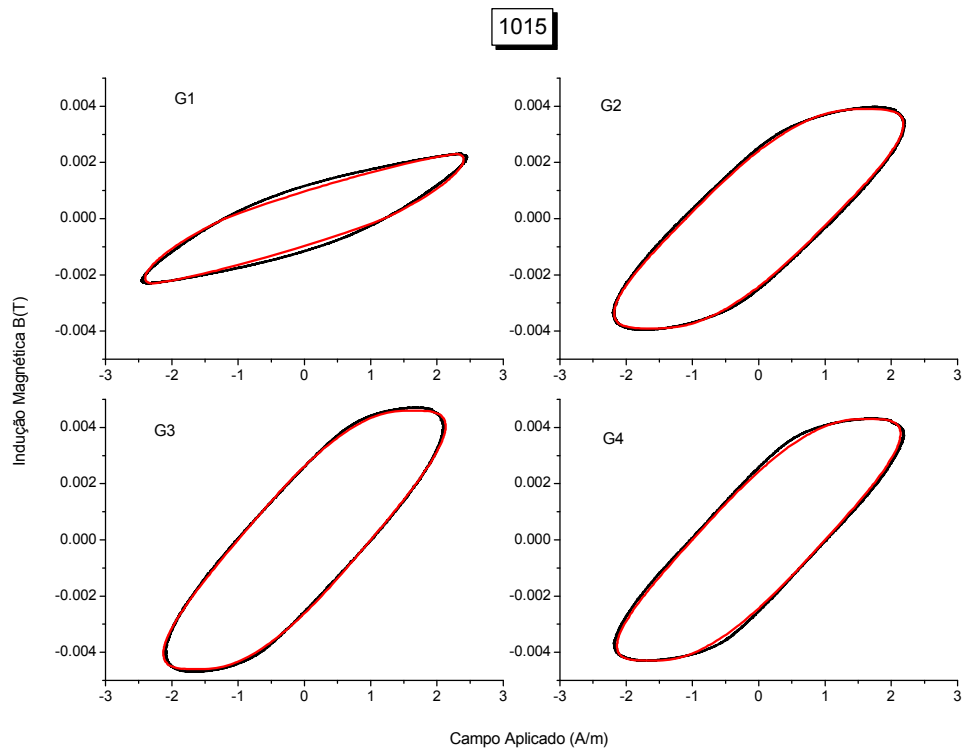


Figura 5. Ajuste dos ciclos de histerese das amostras de aço 1015.

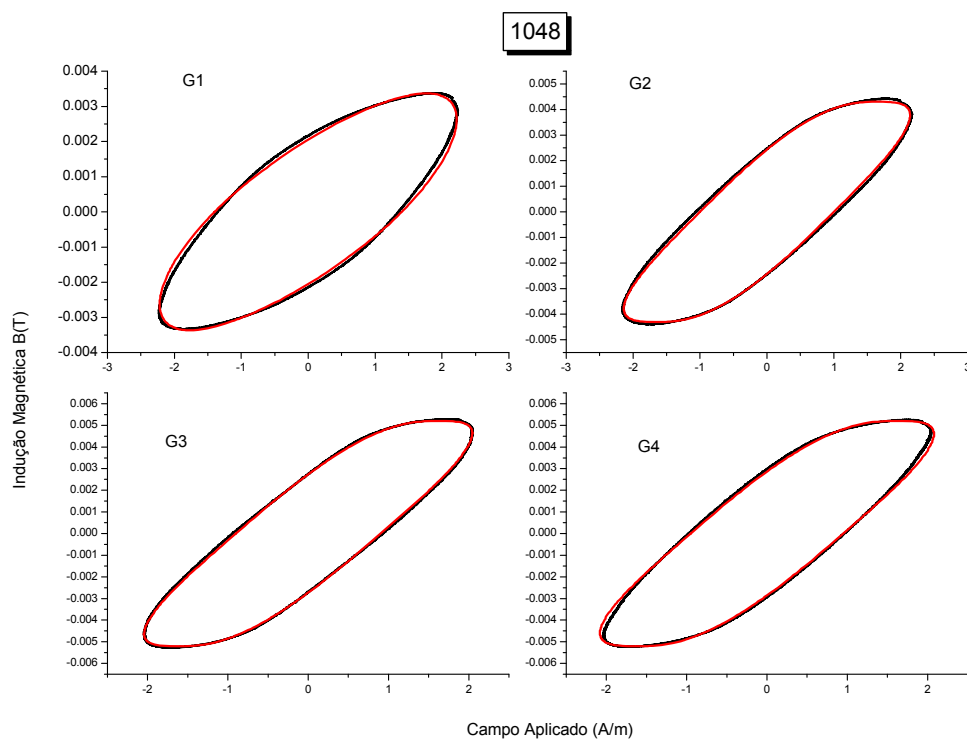


Figura 6. Ajuste dos ciclos de histerese das amostras de aço 1048.

Os parâmetros gerados pelo modelo da *Superellipse* para o aço 1011, 1015 e 1048 encontram-se na Tabela 4, 5 e 6, respectivamente:

Tabela 4. Parâmetros obtidos pelo modelo da *Superellipse*, relativos ao aço 1011

1011				
	G1	G2	G3	G4
a	1,1	1	1	1
b	0,0019	0,0039	0,004	0,0044
n	1,5	3	3	3
d	0,0008	0,0022	0,0023	0,0029

Tabela 5. Parâmetros obtidos pelo modelo da *Superellipse*, relativos ao aço 1015

1015				
	G1	G2	G3	G4
a	1,2	1,1	1	1
b	0,0023	0,0039	0,0046	0,0043
n	1,5	3	3	3
d	0,001	0,0024	0,0028	0,0026

Tabela 6. Parâmetros obtidos pelo modelo da *Superellipse*, relativos ao aço 1048

1048				
	G1	G2	G3	G4
a	1,4	1	0,9	0,95
b	0,00337	0,0043	0,0052	0,0052
n	1,9	3	3	3
d	0,0019	0,0026	0,0032	0,0032

4 DISCUSSÃO

A partir da análise dos gráficos pode-se observar que o modelo foi capaz de ajustar, com bastante precisão, as curvas de histerese, independente do tratamento térmico realizado.

Em relação aos parâmetros, em todos os casos, o parâmetro n manteve-se abaixo de 2 para as amostras do grupo 1. De fato, as curvas dessas amostras apresentam um aspecto de ‘bastonete’, muito próximo ao aspecto elíptico típico, ou seja, quando $n=2$. Os demais grupos apresentaram, invariavelmente, $n=3$. Este resultado comprova a forma levemente retangular das demais curvas.

Os menores valores do parâmetro d pertencem às amostras do grupo 1, ou seja às amostras cujos ciclos de histerese apresentam as maiores inclinações. Quanto menor o valor de d maior é a inclinação apresentada pela curva de histerese.

O parâmetro a (relacionado ao campo coercivo) apresenta os maiores valores para as amostras do grupo 1. De fato, são amostras que possuem grandes perdas por histerese.

O parâmetro b (relacionado à remanência) apresenta valores bastante próximos, exceto para as amostras do grupo 1, o que sugere a influência do tratamento térmico.

Ao se avaliar a eficiência do modelo da *Superellipse* pode-se deduzir que, mesmo ao se tratar de amostras cujos ciclos de histerese sofreram alguma alteração por ocasião do tratamento térmico, o modelo foi capaz de descrever com exatidão as curvas propostas.

5 CONCLUSÃO

O modelo da *Superellipse*, elaborado com o propósito de descrever curvas de histerese magnética obtidas em condições de alta frequência de campo aplicado, mostrou-se adequado a curvas com aspecto elíptico variável. O modelo aplica-se tanto às amostras comuns como às tratadas termicamente, sem prejuízo a sua eficácia. Para o ajuste realizado por este método os ciclos de histerese das amostras não precisam, necessariamente, possuir características totalmente elípticas, podendo apresentar algumas nuances retangulares, quadradas, e até mesmo formas mais exóticas como bastonetes.

Sendo assim, o modelo da *Superellipse* é altamente indicado para descrição de ciclos de histerese de materiais magnéticos, resultando em ajustes bastante precisos, independente do histórico de tratamento da amostra.

Agradecimentos

F.A.S. da Silva agrade a Capes. M.F. de Campos agradece ao CNPq e Faperj. Os autores agradecem a Freddy A. Franco e Linilson R Padovese (LADIN) por cederem as medidas de curva de histerese.

REFERÊNCIAS

- 1 HEINS, P. *Superellipse*. Disponível em: <http://www.matematiksider.dk/piethein.html#bord>. Acesso em: 23 de maio de 2011.
- 2 ZHANG, X.; ROSIN, P.L. Superellipse Fitting to Partial Data. *The Journal of the Pattern Recognition Society*. n. 36, p.743-752, fevereiro, 2002.
- 3 DA SILVA, F.A.S.; Desenvolvimento de Modelos Matemáticos para Ajuste de Curvas de Histerese Magnética. Dissertação. Defesa em 06 de Setembro de 2011. Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ.
- 4 ALMEIDA, L.A.L.; LIMA, A.M.N.; NE, H. Um Modelo Diferencial para Histerese Magnética: Representação Algébrica Recursiva. *Revista Controle e Automação*, Campina Grande, v.14, n.1, p. 58-68, mar. 2003.
- 5 LANDGRAF, F.J.G. Propriedades Magnéticas de Aços para Fins Elétricos. Disponível em: <http://www.pmt.usp.br/academic/landgraf/>. Acesso em: 09 de julho de 2011.
- 6 FARIA, R.N. ; LIMA L.F.C.P. *Introdução ao Magnetismo dos Materiais*. 1^a edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- 7 CULLITY, B.D.; GRAHAM, C.D. *Introduction to Magnetic Materials*. 2^a edição. New Jersey: Editora John Wiley, 2009.
- 8 REZENDE, S. M. Magnetismo e Materiais Magnéticos no Brasil. *Boletim da Sociedade Brasileira de Física.*, Pernambuco, v.22, n. 3, p. 333-342, set.1998.
- 9 CHIKAZUMI, S. *Physics of Magnetism*. (Robert E. Krieger Pub. Company. Malabar Florida, 1984).
- 10 DE CAMPOS, M.F.; FRANCO, F.A.; SANTOS, R.; DA SILVA, F.A.S.; RIBEIRO, S. B.; LINS, J.F.C.; PADOVESE, L.R.. Magnetic Barkhausen Noise in quenched carburized steels. *Journal of Physics. Conference Series (Online)*, v. 303, p. 012030, 2011.
- 11 CALLEN, E.; LIU, Y.J.; CULLEN, J.R. Initial Magnetization, Remanence, and Coercivity of the Random Anisotropy Amorphous Ferromagnet. *Physical Review B*, v. 16, n 1, 1 julho 1977.