

# IMPLANTAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO CONSTITUTIVO BASEADO EM DENSIDADE DE DISCORDÂNCIAS<sup>1</sup>

Renata Garcez<sup>2</sup>  
Luciano Pessanha Moreira<sup>3</sup>  
Marcos Flávio Campos<sup>4</sup>

## Resumo

Neste trabalho, são apresentados os procedimentos necessários à implantação computacional de um modelo constitutivo baseado na evolução da densidade de discordâncias. Para tal foi adotado um modelo fenomenológico proposto na literatura para descrever o comportamento de metais com estrutura cristalina CFC. Primeiro, as equações constitutivas são detalhadas para o caso particular de elasticidade linear isotrópica em conjunto com a lei associada de escoamento plástico. Ademais, foi adotado um critério de escoamento que permite a reprodução de superfícies de escoamento de metais CFC obtidas com modelos de plasticidade policristalina. Em seguida, dados experimentais obtidos na literatura para o ensaio de tração uniaxial do cobre puro foram adotados para validar a implantação computacional proposta em elementos finitos. As previsões numéricas obtidas para os valores das tensões e deformações totais verdadeiras estão em muito boa concordância com a curva experimental comprovando que a implantação computacional proposta é consistente com o modelo de densidade de discordâncias adotado no presente trabalho.

**Palavras-chave:** Método de elementos finitos; Densidade de discordâncias; Encruamento; Recuperação.

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF A CONSTITUTIVE MODEL BASED ON DISLOCATION DENSITY

### Abstract

In this work, the procedures for the numerical implementation of a dislocation density based constitutive model are presented. For this purpose, a phenomenological model proposed in the literature to describe the behavior of FCC metals is adopted. Firstly, the constitutive equations are detailed for the particular case of linear isotropic elasticity together with the associated plastic flow rule. Also, a yield criterion allowing for the description of isotropic yield loci obtained for FCC metals with polycrystalline plasticity models is adopted. Afterwards, the experimental data obtained from the literature for the uniaxial tensile test of pure copper is adopted so as to validate the proposed finite element implementation. The corresponding numerical predictions obtained for the true stresses – true total strains are in very good agreement with the experimental measurements showing that the proposed numerical implementation is consistent with the dislocation density based model adopted in the present work.

**Key words:** Finite Element Method; Dislocation density; Work-hardening; Recovery.

<sup>1</sup> *Contribuição técnica ao 63º Congresso Anual da ABM, 28 de julho a 1º de agosto de 2008, Santos, SP, Brasil*

<sup>2</sup> *Eng. Metalúrgico, Mestrando, Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica, Universidade Federal Fluminense, garcez@metal.eeimvr.uff.br*

<sup>3</sup> *Eng. Mecânico, D.Sc., Professor Adjunto, Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica, Universidade Federal Fluminense, luciano.moreira@metal.eeimvr.uff.br*

<sup>4</sup> *Eng. Metalúrgico, D.Sc., Professor Visitante, Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica, Universidade Federal Fluminense, mc campos@metal.eeimvr.uff.br*

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de encruamento de Taylor<sup>(1)</sup> estabelece como primeira aproximação do comportamento de materiais cristalinos uma relação parabólica entre tensão crítica de cisalhamento  $\tau$  e distorção angular  $\gamma$ . Entretanto, a curva  $\tau - \gamma$  pode se desviar consideravelmente desta relação parabólica para materiais monocristalinos, dependendo da estrutura e orientação cristalina, pureza e condições superficiais. Pode-se notar na Figura 1 que os materiais de estrutura HC apresentam uma baixa taxa de encruamento, uma vez que esses materiais são frágeis por apresentarem apenas 3 sistemas de deslizamento. Os materiais de estrutura cúbica ao contrário, se deformam de forma complexa em mais de um sistema de deslizamento, o que os tornam os principais alvos de estudos sobre encruamento dos metais.

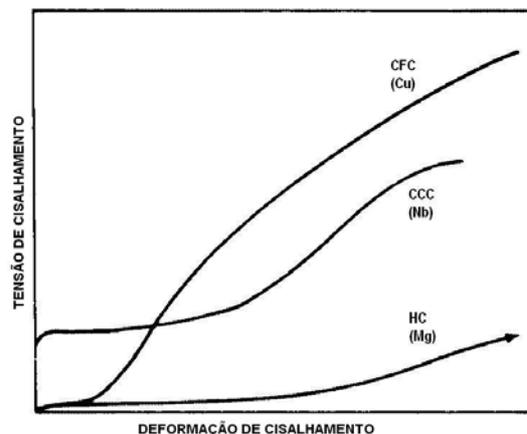
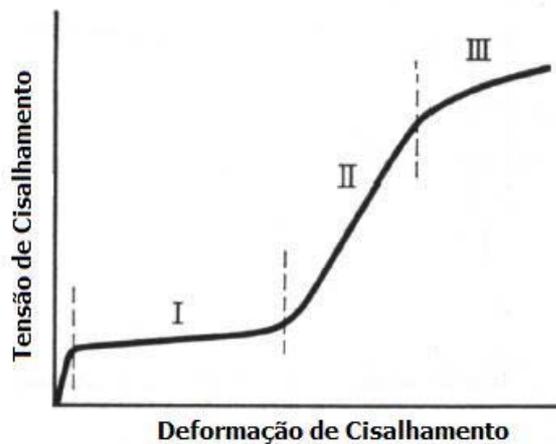


Figura 1. Curva tensão e deformação em monocristais.<sup>(2)</sup>

A Figura 2 apresenta a curva típica  $\tau - \gamma$  para monocristais de metais CFC. Segundo Bishop e Smallman,<sup>(2)</sup> a curva de escoamento pode ser dividida em três regiões ou estágios I, II e III. O estágio I, ou de fácil deslizamento (*easy glide*) é caracterizado por uma baixa taxa de encruamento, pois as discordâncias conseguem se movimentar por longas distâncias sem encontrar barreiras. Durante este estágio o deslizamento ocorre em apenas um sistema. A região de deslizamento fácil é mais proeminente nos cristais HC do que nos CFC. Em seguida, o estágio II é uma região da curva praticamente linear onde a taxa de encruamento aumenta rapidamente. Isto ocorre de forma praticamente independente do estado de tensão e temperatura, e quase independente da orientação e pureza do material. Ao contrário do estágio I, no estágio II o deslizamento ocorre em mais de um sistema. Por fim, o estágio III começa quando a curva  $\tau - \gamma$  se desvia da linearidade e é caracterizada por um estágio parabólico onde a taxa de encruamento decresce continuamente e a densidade de discordâncias praticamente não se altera. Entretanto, é fortemente dependente da temperatura. Nos materiais policristalinos de estrutura CFC, os estágios I e II estão ausentes. A lei empírica de potência de Holloman é a mais usada para descrever o encruamento de metais policristalinos:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (1)$$

onde K é o coeficiente de resistência que usualmente varia entre 1/10 a 1/1000 G, sendo G o módulo de cisalhamento, ao passo que n é o expoente de encruamento que depende do material, da temperatura e deformação e varia de 0,2 a 0,5.



**Figura 2.** Estágios de encruamento observados para monocristais CFC.<sup>(2)</sup>

Do ponto de vista microscópico, uma das grandes dificuldades no estudo do encruamento dos metais é determinar ou avaliar como a densidade e distribuição de discordâncias variam com o processo de deformação plástica. Neste sentido, diversas teorias têm sido propostas como, por exemplo, os modelos constitutivos propostos por Kocks,<sup>(3)</sup> Kocks e Mecking<sup>(4)</sup> e Estrin e Mecking<sup>(5)</sup> e baseados na evolução da densidade de discordâncias em função da deformação plástica efetiva. Este tipo de modelamento mesoscópico descreve a evolução das discordâncias durante deformação, tensões e deformações efetivas e ainda a cinética de evolução da estrutura por meio de uma competição entre os processos de armazenagem de (encruamento) e aniquilamento (recuperação) de discordâncias.

Neste trabalho adotou-se a descrição fenomenológica de Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup> para fins de simulação numérica de processos de conformação mecânica como, por exemplo, a prensagem em canais equiangulares e a laminação de aços planos. Em um primeiro tempo, são apresentadas as equações constitutivas necessárias a implementação do modelo de Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup> no código comercial de elementos finitos ABAQUS. Em seguida, o método geral de integração do tipo previsão elástica – correção plástica é detalhado para fins de implantação computacional do modelo de Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup> na subrotina Fortran aberta ao usuário da versão explícita do código ABAQUS. Finalmente, as previsões numéricas determinadas com o modelo adotado para a solitação de tração uniaxial são comparadas com os resultados experimentais obtidos para o cobre puro por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup>

## 2 MODELAMENTO

### 2.1 Equações Constitutivas

A idéia básica do encruamento proposta por Taylor<sup>(1)</sup> para materiais com distribuição de discordâncias uniformes é que algumas discordâncias ao se moverem interagem elasticamente com outras e são bloqueadas. As discordâncias bloqueadas agem como fontes de tensões internas que geralmente aumentam a tensão com o aumento da deformação. Sendo assim,  $\hat{\sigma}$ , a tensão de escoamento definida para uma dada densidade de discordâncias medida em condições de referência, pode ser definida como:

$$\hat{\sigma} = M \alpha G b \sqrt{\rho} \quad (2)$$

onde,  $b$  é o vetor de Burgers,  $\alpha$  é uma constante,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $M$  é chamado de fator de Taylor e é dependente da orientação do cristal e da trajetória de deformação e  $\rho$  a densidade de discordâncias.

Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup> propõem que a evolução da densidade de discordâncias com a deformação efetiva seja descrita por:

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = M \left[ k_1 \rho^{1/2} - k_2 \rho \right] \quad (3)$$

onde o parâmetro  $k_1$  está associado ao armazenamento atômico das discordâncias em movimento, isto é, estágio II de encruamento, que se tornam imóveis depois de percorrerem uma distância proporcional à média espacial de discordâncias  $\rho^{1/2}$ . Já o parâmetro  $k_2$  relaciona-se com a recuperação dinâmica, estágio III de encruamento, proporcional à média do comprimento de discordâncias aniquiladas. Neste caso, uma vez que o fenômeno de recuperação é termicamente ativado, este parâmetro é função da temperatura e da taxa de deformação.

Primeiro, é possível obter a taxa de encruamento a partir das Eqs. (2) e (3):

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{M \alpha G b}{2} \left[ k_1 - k_2 \sqrt{\rho} \right] \quad (4)$$

e, em seguida, introduzindo a taxa de encruamento inicial:

$$\theta_0 = \frac{M \alpha G b k_1}{2} \quad (5)$$

e a tensão de escoamento de saturação,

$$\hat{\sigma}_s = M \alpha G b \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \quad (6)$$

a Eq.(4) pode ser reescrita por:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \theta_0 \left[ 1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_s} \right] \quad (7)$$

Por outro lado, é preciso relacionar as grandezas efetivas de tensão e deformação. Para tal, Kocks<sup>(3)</sup> propõe uma equação cinética viscoplástica na forma de potência descrita por:

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma} \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}} \right)^{1/m} \quad (8)$$

onde o expoente  $m$  é o índice de sensibilidade a taxa de deformação, que depende da temperatura e do estado microestrutural do material.

A forma diferencial de  $\bar{\sigma}$  assumindo-se a temperatura constante é obtida por:

$$d\bar{\sigma} = \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial (\ln \dot{\bar{\epsilon}})} \right|_{\hat{\sigma}} d(\ln \dot{\bar{\epsilon}}) + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} \right|_{\dot{\bar{\epsilon}}} d\hat{\sigma} \quad (9)$$

ou ainda,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{m} \frac{d(\ln \dot{\bar{\epsilon}})}{d\bar{\epsilon}} + \frac{\bar{\sigma}}{\hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \quad (10)$$

onde da Eq. (8) tem-se que:

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial (\ln \dot{\bar{\epsilon}})} \right|_{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}}{m} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} \right|_{\dot{\bar{\epsilon}}} = \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\hat{\epsilon}} \right)^{1/m} = \frac{\bar{\sigma}}{\hat{\sigma}} \quad (12)$$

Para um carregamento à taxa de deformação constante e a partir da Eq. (7), a taxa de encruamento correspondente às grandezas efetivas é dada por:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \theta = \frac{\bar{\sigma}}{\hat{\sigma}} \theta_0 \left[ 1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_s} \right] \quad (13)$$

É possível estabelecer uma lei de potência viscoplástica para a tensão de saturação mesoscópica:<sup>(3,4)</sup>

$$\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_{s0} \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^{1/n} \quad (14)$$

onde  $\hat{\sigma}_{s0}$  é o valor de tensão de saturação associado ao estado de referência  $\dot{\bar{\epsilon}}_0$ . Do mesmo modo, a tensão efetiva de saturação pode ser definida por:

$$\bar{\sigma}_s = \hat{\sigma}_s \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\hat{\epsilon}} \right)^{1/m} \quad (15)$$

Portanto, assumindo que  $\hat{\epsilon} = \dot{\bar{\epsilon}}_0$ , tem-se a partir das Eqs. (14) e (15) que:

$$\bar{\sigma}_s = \hat{\sigma}_{s0} \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \quad (16)$$

Neste caso particular, i.e., onde se assume taxa de deformação constante, a Eq. (13) pode ser reescrita como

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \theta_0 \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right)^{1/m} \left[ 1 - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_s} \right] \quad (17)$$

Finalmente, integrando a Eq.(17) obtemos a conhecida lei de Voce dada por:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s + (\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_s) \exp \left[ \frac{-(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_0)}{\bar{\varepsilon}_r} \right] \quad (18)$$

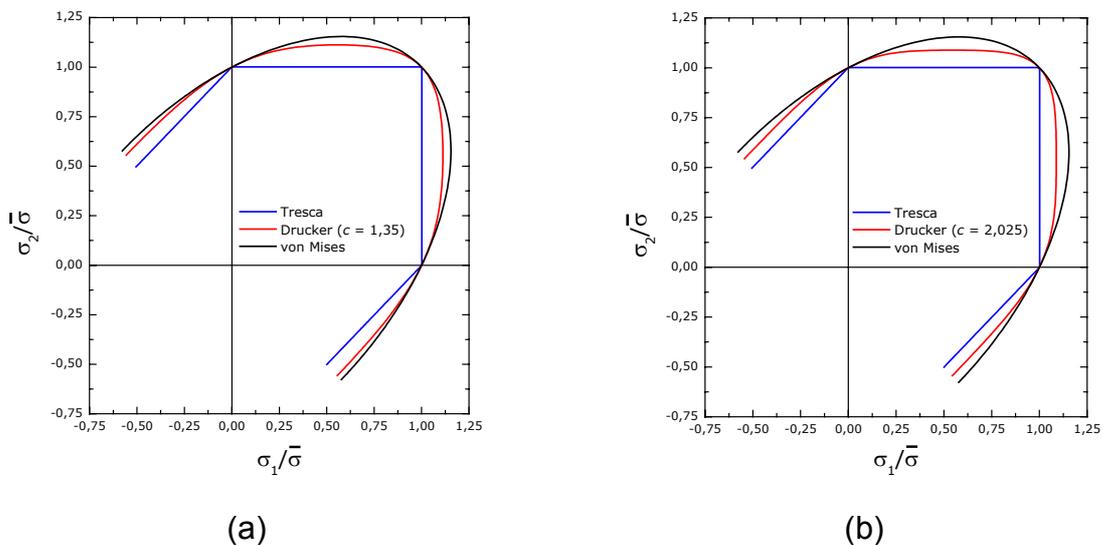
onde  $\bar{\varepsilon}_0$  e  $\bar{\sigma}_0$  são medidas correspondentes ao limite do escoamento ao passo que  $\bar{\varepsilon}_r$  denota uma medida de deformação de relaxação definida por:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\bar{\sigma}_s}{\theta_0} \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right)^{-1/m} \quad (19)$$

Assumindo-se a teoria associada de escoamento plástico em conjunto com a hipótese de encruamento isotrópico, a medida de encruamento  $\bar{\sigma}$ , definida pela Eq. (18), é uma grandeza escalar de tensão efetiva que define o tamanho da superfície de escoamento. Para descrever o comportamento de materiais isotrópicos com estrutura CCC e CFC, foi adotado o critério de escoamento isotrópico de Drucker <sup>(7)</sup> identificado a grandeza de tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  por:

$$F(J_2, J_3) = (3J_2)^{1/2} \left[ 1 - c(J_3^2/J_2^3) \right]^{1/6} = \bar{\sigma} \quad (20)$$

onde  $c$  é um parâmetro material e  $J_2$  e  $J_3$  são o segundo e terceiro invariantes do tensor de tensões desviadoras, respectivamente. Este critério possibilita a obtenção de superfícies de escoamento situadas entre as descrições de Tresca e von Mises (Figura 3). Um aumento no parâmetro  $c$  fornece um achatamento da superfície de escoamento entre os estados plano de deformação em tensão/compressão biaxial e cisalhamento puro.



**Figura 3.** Superfícies de escoamento obtidas com o critério isotrópico de escoamento de Drucker representativas de metais com estruturas: (a) CCC e (b) CFC.

## 2.2 Implantação Numérica

O programa de elementos finitos ABAQUS fornece para cada ponto de integração no começo de cada incremento no tempo  $\Delta t$ , as componentes do tensor de tensões,  $\sigma_{ij}$ , os incrementos do tensor de deformação total,  $\Delta \varepsilon_{ij}$ , e todas as variáveis de estado para um dado critério de plasticidade. O estado de tensões no final do incremento de tempo é obtido do histórico de deformações pela integração das equações constitutivas.<sup>(8)</sup> Doravante, a notação  $\xi^t$  é usada para os valores atuais de todas as variáveis no começo do incremento de tempo,  $\xi^{\text{teste}}$  como as quantidades referidas para a previsão elástica e  $\xi^{t+\Delta t}$  como os valores corrigidos determinados no final do incremento de tempo. O procedimento de integração geral é baseado no algoritmo de previsão elástica – correção plástica ou método do retorno normal. Primeiro, calcula-se as componentes de tensão de teste a partir de uma previsão elástica usando a lei generalizada de Hooke,

$$\sigma_{ij}^{\text{teste}} = \sigma_{ij}^t + \lambda \Delta \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \Delta \varepsilon_{ij} \quad (21)$$

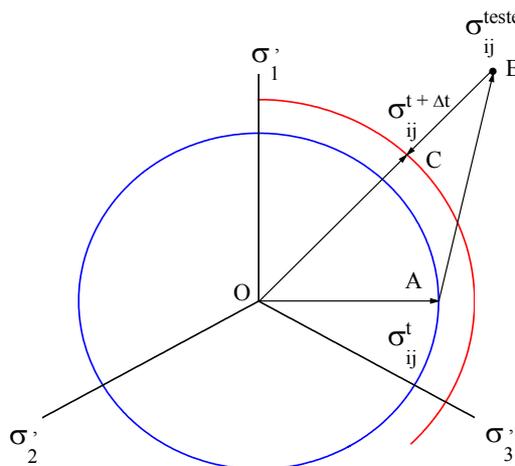
onde  $\lambda$  e  $G$  são os coeficientes de Lamè e  $\delta_{ij}$  é o operador delta de Kronecker. Neste caso é assumida a hipótese de pequenas deformações onde a deformação total é decomposta por uma parte elástica e outra viscoplástica, ou seja:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (22)$$

Em seguida, é preciso verificar se houve escoamento elastoviscoplástico, ou seja, se a condição abaixo foi satisfeita:

$$f(\sigma_{ij}^{\text{teste}}, \bar{\varepsilon}^t, \dot{\varepsilon}^t) = F(\sigma_{ij}^{\text{teste}}) - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^t, \dot{\varepsilon}^t) \geq 0 \quad (23)$$

Caso contrário, a previsão conduziu a um carregamento puramente elástico, isto é,  $f < 0$ . A Figura 4 esquematiza o método de previsão elástica-correção plástica onde para o critério de escoamento do critério de von Mises no plano  $\pi$ .



**Figura 4.** Método do retorno radial: critério de von Mises.

As componentes de tensão no fim do incremento de tempo são então determinadas pela correção plástica definida por:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{\text{teste}} - 2G \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{vp}} \quad (24)$$

É importante observar que esta correção é colinear ao vetor de incrementos de deformação viscoplástica. Isto justifica a denominação de método de retorno normal, pois os incrementos de deformação viscoplástica são normais à superfície de escoamento. No caso particular do critério de von Mises representado no plano  $\pi$ , denomina-se método do retorno-radial.

A solução do problema depende agora da determinação do incremento de deformação efetiva visto que a Eq.(24) pode ser rescrita por:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{\text{teste}} - 2G \Delta \bar{\varepsilon} F_{,ij} \quad (25)$$

onde adotou-se a seguinte notação  $F_{,ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ .

O incremento de deformação efetiva pode ser determinado a partir da equivalência do trabalho plástico realizado por estado qualquer com aquele reeditado pelas grandezas efetivas. Neste caso, este princípio é aplicado às grandezas calculadas no fim do incremento de tempo, ou seja:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_{ij}^{\text{vp}} = \bar{\sigma}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\varepsilon} \quad (26)$$

Ainda, substituindo na Eq.(26) a definição das componentes de deformação viscoplástica tem-se:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} F_{,ij} = \bar{\sigma}^{t+\Delta t} \quad (27)$$

onde as derivadas parciais da função de escoamento são definidas para o estado de tensões de teste. O termo da tensão efetiva é definido por:

$$\bar{\sigma}^{t+\Delta t} = \bar{\sigma}^t + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{\dot{\bar{\varepsilon}}^t} \Delta \bar{\varepsilon} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{\dot{\bar{\varepsilon}}^t} \Delta \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (28)$$

onde as derivadas parciais são obtidas a partir da lei de encruamento viscoplástico. O incremento da taxa de deformação efetiva é definido a partir de uma interpolação linear do incremento de deformação efetiva num dado incremento de tempo:

$$\Delta \bar{\varepsilon} = \left[ (1 - \Theta) \dot{\bar{\varepsilon}}^t + \Theta \dot{\bar{\varepsilon}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (29)$$

Para  $\Theta = 1$ , ou seja,

$$\Delta \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{t+\Delta t} - \dot{\bar{\varepsilon}}^t = \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\Delta t} - \dot{\bar{\varepsilon}}^t \quad (30)$$

Retornando com as Eqs.(28) e (30) na Eq.(27):

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} F_{,ij}^{\text{teste}} = \bar{\sigma}^t + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \right|_{\dot{\bar{\epsilon}}} \Delta \bar{\epsilon} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} \right|_{\bar{\epsilon}} \left[ \frac{\Delta \bar{\epsilon}}{\Delta t} - \dot{\bar{\epsilon}}^t \right] \quad (31)$$

Em seguida, substituindo na Eq.(30) as componentes de tensão corrigidas pela Eq.(25), tem-se que:

$$(\sigma_{ij} F_{,ij})^{\text{teste}} \left[ 1 - \frac{2G \Delta \bar{\epsilon} (F_{,ij} F_{,ij})^{\text{teste}}}{(\sigma_{ij} F_{,ij})^{\text{teste}}} \right] = \bar{\sigma}^t + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \right|_{\dot{\bar{\epsilon}}} \Delta \bar{\epsilon} + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} \right|_{\bar{\epsilon}} \left[ \frac{\Delta \bar{\epsilon}}{\Delta t} - \dot{\bar{\epsilon}}^t \right] \quad (32)$$

ou a função não-linear em  $\Delta \bar{\epsilon}$ :

$$f(\Delta \bar{\epsilon}) = 0 \quad (33)$$

cujo zero fornece a solução para o incremento de deformação plástica efetiva  $\Delta \bar{\epsilon}$ . A solução da Eq. (33) é obtida por meio de um algoritmo do método de bissecção com tolerância de  $10^{-8}$ . O modelo de Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup> foi implantado no programa ABAQUS/Explicit por meio da subrotina aberta ao usuário (VUMAT) em linguagem Fortran 77.

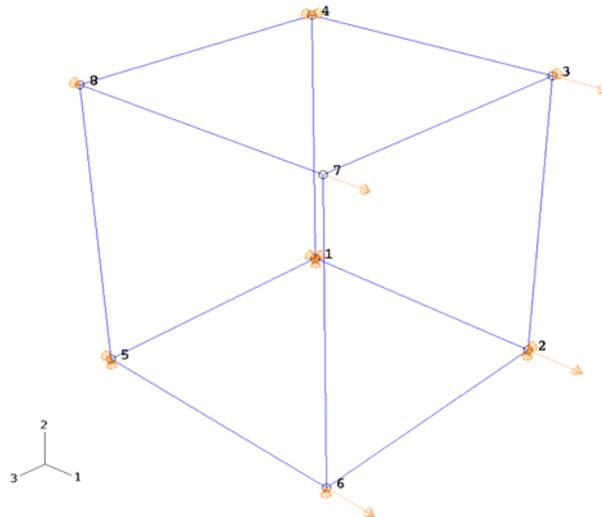
### 3 VALIDAÇÃO

A Tabela 1 mostra os valores empregados neste trabalho para os parâmetros do modelo de densidade de discordâncias proposto por Kocks-Mecking<sup>(3,4)</sup>. Para fins de comparação, foi adotado o cobre puro caracterizado experimentalmente por Dalla Torre et al.,<sup>(6)</sup> com módulo de elasticidade transversal  $G = 48,3$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,343$ . O parâmetro  $c$  de ajuste da superfície de escoamento de Drucker foi adotado igual a 2,025.

**Tabela 1.** Parâmetros do modelo de densidade de discordâncias de Kocks-Mecking.<sup>(3,4)</sup>

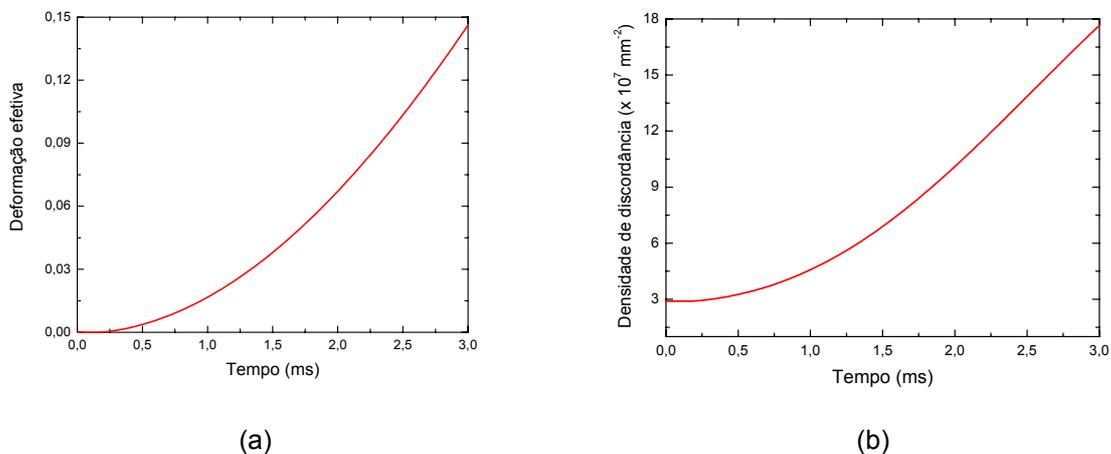
$k_1$ (mm <sup>-1</sup> )	$k_2$	$\alpha$	$b$ (mm)	$\rho_0$ (mm <sup>-2</sup> )	$M$	$m$	$\dot{\bar{\epsilon}}_0$ (s <sup>-1</sup> )
$8,32 \times 10^7$	4,777	0,33	$2,56 \times 10^{-7}$	$2,90 \times 10^7$	3,06	500	1

O problema do ensaio de tração uniaxial foi aproximado adotando-se a solução elastoviscoplasticidade correspondente a um elemento sólido com um único ponto de integração de Gauss, elemento C3D8R de acordo com a terminologia do ABAQUS. A Figura 5 esquematiza as condições de contorno do modelo onde foi empregada simetria de 1/8. Os símbolos nos nós representam as direções de restrições em deslocamentos segundo os eixos coordenados (1,2,3), onde as condições de simetria foram imposta nos lados formados pelos nós (1,2,3,4), (1,2,6,5) e (1,4,8,5). O carregamento em tração uniaxial é realizado segundo a direção 1 por meio de um deslocamento imposto por uma curva de velocidade que assegura a condição de um problema quase-estático.



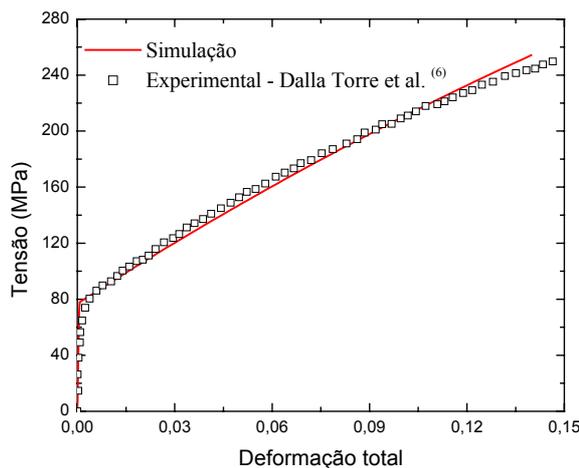
**Figura 5.** Condições de contornos e carregamento.

A Figura 6 apresenta respectivamente as evoluções da deformação efetiva e da densidade de discordâncias em função do tempo de simulação computacional. Pode-se observar que nos dois casos é obedecida uma relação parabólica uma vez que as equações constitutivas são integradas em função do tempo e, em particular, a Eq. (3) apresenta no termo de encruamento uma dependência proporcional com a raiz quadrada da densidade de discordâncias.



**Figura 6.** Deformação efetiva em função do tempo de processamento.

A Figura 7 compara a curva tensão normal - deformação total em tração uniaxial prevista pelo modelo de elementos finitos com os resultados experimentais obtidos para o cobre puro por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup> É possível observar uma excelente concordância entre os pontos experimentais com a curva prevista pelo método de elementos finitos empregando-se o modelo de densidade de discordâncias de Kocks-Mecking.<sup>(4,5)</sup>



**Figura 7.** Comparação das curvas tensão – deformação total determinadas pelo método de elementos finitos com o modelo de Kocks-Mecking<sup>(4,5)</sup> com os valores experimentais obtidos em tração uniaxial para o cobre puro por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup>

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentadas primeiramente as equações constitutivas necessárias a implantação computacional do modelo de densidade de discordâncias proposto por Kocks-Mecking.<sup>(4,5)</sup> Em seguida, a implantação computacional no programa de elementos finitos ABAQUS/Explicit foi validada a partir da simulação numérica de um modelo representativo do ensaio de tração uniaxial para o cobre puro conduzido por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup> A boa concordância encontrada entre as previsões numéricas e os pontos experimentais de tensão e deformação demonstrou a consistência dos métodos adotados para integração das equações constitutivas e implantação computacional no programa comercial de elementos finitos ABAQUS. Deste modo, é possível obter a solução para o caso particular do estado plano de deformação e então realizar as simulações numéricas dos ensaios de prensagem em canais equiangulares também conduzidos por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup> Atualmente, este segundo trabalho está em fases de validação com bases nas medidas de densidades de discordâncias obtidas por Dalla Torre et al.<sup>(6)</sup> com auxílio da técnica de microscopia eletrônica de transmissão.

## Agradecimentos

Renata Garcez agradece a CAPES pelo financiamento da bolsa de pesquisa de mestrado.

## REFERÊNCIAS

- 1 TAYLOR, G.I., The mechanism of plastic deformation of crystals. part i.-theoretical. Proceedings of the Royal Society of London A 145, pp. 362–387, 1934.
- 2 BISHOP, R.J., SMALLMAN, R.E., Modern Physical Metallurgy and Materials Engineering.6 ed. Reed Educational and Professional Publishing Ltd,1999.
- 3 KOCKS, U.F., Laws for work-hardening and Low- Temperature Creep. Journal of Engineering Materials and Technology, Argonne National laboratory, 1976.

- 4 MECKING, H., KOCKS, U.F., Kinetics of Flow and Strain- Hardening. *Acta Metallurgica*, vol. 29, pp. 1865-1875, 1981.
- 5 ESTRIN, Y., MECKING, H., A unified phenomenological description of work Hardening and Creep based on one-parameter models. *Acta Metallurgica*, No.1, vol.32, pp. 57-70, 1984.
- 6 TORRE, F.D., LAPOVOK, R., SANDLIN, J., THOMSON, P.F., DAVIES, C.H.J., PERELOMA, E.V., Microstructures and properties of copper processed by equal channel angular extrusion for 1- 16 passes. *Acta Materialia*, vol.52, pp.4819-4832, 2004.
- 7 DRUCKER, D.C., Relation of Experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Mechanics transaction of the ASME*, vol.16, pp.349-357, 1949.
- 8 MOREIRA, L.P., FERRON,G., Finite element implementation of an orthotropic plasticity model for sheet metal forming simulations. *Latin American Journal of Solids and structures*, 2006.