

# MODELO MATEMÁTICO PARA A ANÁLISE DA CONFORMAÇÃO DE CHAPAS METÁLICAS PARA A FABRICAÇÃO DE TUBOS<sup>1</sup>

Anselmo Monteiro Ilkiu<sup>2</sup>  
Sidney Barbalho da Silva Braga<sup>3</sup>  
Adriano Vinhoto<sup>4</sup>

## Resumo

O presente trabalho apresenta, um modelo matemático para a análise da conformação de chapas metálicas, formando uma peça em "U", como parte do processo de fabricação de tubos. O objetivo do presente trabalho é obter uma estimativa para a carga de conformação e para as tensões residuais devido ao processo. O modelo foi desenvolvido com base nas teorias plásticas pelo método da energia de conformação utilizando o critério de escoamento de von-Mises conforme apresentado por Chakrabarty, Mellore Al-Qureshi. Para a análise dos resultados, foram consideradas, as propriedades geométricas que definem a peça e a matriz de conformação, bem como as propriedades do material. Os resultados teóricos para a tensão residual, para o trabalho total de conformação, para a força de conformação e para o raio final de conformação são obtidos em função das propriedades geométricas do processo e das propriedades do material.

**Palavras-chave:** Conformação; Energia; Trabalho.

## MATHEMATICAL MODEL FOR THE ANALYSIS OF THE FORMING OF METALLIC PLATE FOR THE PRODUCTION OF TUBOS

### Abstract

The present work presents, a mathematical model for the analysis of the forming of metallic plate, forming a piece in "U", as part of the process of production of tubes. The objective of the present work is to obtain an estimate for the forming load and for the residual tensions due to the process. The model was developed with base in the plastic theories for the method of the forming energy using the criterion of von-Mises as presented by Chakrabarty, Mellor and Al-Qureshi. For the analysis of the results, they were considered, the geometric properties that they define the piece and the forming die, as well as the properties of the material. The theoretical results for the residual tension, for the total work of forming, for the forming force and for the final ray of forming they are obtained in function of the geometric properties of the process and of the properties of the material.

**Key words:** Forming; Energy; Work.

<sup>1</sup> Contribuição técnica apresentada na 61º Congresso Anual da ABM, de 24 a 27 de julho de 2006, Rio de Janeiro – RJ

<sup>2</sup> Professor Assistente Doutor dos Departamentos de Engenharia Civil/Mecânica da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

<sup>3</sup> Engenheiro Mecânico e aluno do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

<sup>4</sup> Engenheiro Mecânico e aluno do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

# 1 INTRODUÇÃO

No mecanismo do processo, a chapa é conformada conforme representada na Figura 1. A deformação crítica dependerá, das condições geométricas e de material.

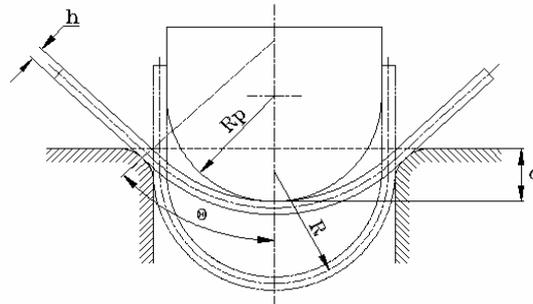


Figura 1. Geometria do processo de conformação.

Sendo:  $R_p$  é o raio do punção;  $h$  é a espessura da chapa;  $R = R_p + (h/2)$  é o raio médio;  $\theta$  é o ângulo de conformação;  $\delta$  é o deslocamento da prensa.

Para o balanço energético, partiu-se das considerações propostas por Al-Qureshi<sup>(1)</sup> que foram usadas na presente análise onde, o somatório das parcelas de energia envolvidas no processo de conformação deve ser nulo ( $\Sigma W = 0$ ).

O objetivo, do presente trabalho, é desenvolver um modelo matemático capaz de fornecer uma estimativa da carga de máquina necessária para conformar a peça, e obter as tensões residuais resultantes do processo.

Algumas hipóteses serão colocadas seguidas do desenvolvimento teórico.

## 1.1 Hipóteses

A primeira hipótese se deve ao fato de estar trabalhando com chapas, para os quais a teoria de membrana é aplicável segundo Timoshenko e Krieger.<sup>(2)</sup> Assim, fica desprezada a variação de tensões ao longo da espessura parede da seção reta da peça conformada definindo-se o estado plano de tensões.

Em segundo lugar, como se está trabalhando no campo plástico, desprezando as deformações elásticas, admite-se que o material seja incompressível ou, que a soma dos incrementos das deformações principais seja nula para qualquer estágio de conformação, conforme apresentado por Mellor<sup>(3)</sup> e Al-Qureshi.<sup>(1)</sup>

$$d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z + d\varepsilon_y = 0. \quad (1)$$

Sendo:  $d\varepsilon_\theta$  é o incremento da deformação circunferencial;  $d\varepsilon_z$  é o incremento da deformação na espessura e  $d\varepsilon_y$  é o incremento da deformação longitudinal.

Conforme o critério de escoamento de von-Mises, apresentado por Chakrabarty<sup>(4)</sup> e Mellor,<sup>(3)</sup> a tensão e a deformação efetivas para as direções principais, serão definidas pelas Eqs.(2) e (3), respectivamente.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2]^{1/2}. \quad (2)$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3)$$

Sendo: Na Eq.(2),  $\bar{\sigma}$  é a deformação efetiva;  $\sigma_\theta$  é a tensão circunferencial;  $\sigma_z$  é a tensão na espessura e  $\sigma_y$  é a tensão longitudinal. Na Eq.(3),  $d\bar{\varepsilon}$  é o incremento da deformação efetiva.

Uma vez que os eixos principais dos incrementos sucessivos de deformação não têm rotação em relação ao elemento que está sendo deformado, pode-se passar a utilizar a Eq.(1) em sua forma integral conforme apresentado por Mellor.<sup>(3)</sup>

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_z + \varepsilon_y = 0 . \quad (4)$$

Outra hipótese é que o nível de encruamento do material é função somente do trabalho plástico total e independente do processo de deformação. Para o material isotrópico e desprezando-se o efeito Bauschinger, conforme apresentado por Al-Qureshi,<sup>(1)</sup> tem-se então que a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  será função do trabalho plástico.

$$\bar{\sigma} = f(W_p) . \quad (5)$$

No presente trabalho, a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  será definida pela expressão de Hollomon (1)(2)(3), onde K é o coeficiente de resistência e  $n$  o coeficiente de encruamento.

$$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon})^n . \quad (6)$$

Como hipóteses finais, considera-se que não haverá a dissipação de energia devido ao atrito e o processo será considerado quase estático.

## 2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

### 2.1 Deformação do Material

No modelo proposto, toda a energia fornecida para a conformação da peça provém do trabalho realizado pela prensa, e uma vez que se conheça a relação carga-deslocamento (F- $\delta$ ) ao longo do processo, a sua avaliação é imediata e será dada pela equação.

$$F \cdot \delta = W_c . \quad (7)$$

Para avaliar a energia adsorvida pela deformação do material, parte-se da relação entre o incremento de trabalho plástico por unidade de volume,  $dW_p$ , e das tensões e deformações efetivas, conforme definida por Al-Qureshi<sup>(3)</sup> e dada pela equação:

$$dW_p = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon} . \quad (8)$$

Uma vez que existe constância entre as relações dos incrementos de deformação ao longo do processo de conformação, pode-se trabalhar com as deformações na sua forma integral, o que permite determinar o trabalho plástico por unidade de volume,  $W_p$ , entre os estágios inicial e final da conformação. Substituindo-se a tensão efetiva dada pela Eq.(6) na Eq.(8), tem-se:

$$\int_{W_0}^{W_f} dW_p = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_f} K \cdot (\bar{\varepsilon})^\eta d\bar{\varepsilon}. \quad (9)$$

Integrando-se os dois lados da Eq.(9). Sendo que o trabalho inicial  $W_0$  e a deformação inicial  $\varepsilon_0$  são nulos, logo:

$$W_p = \frac{K}{(\eta + 1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)}. \quad (10)$$

Para obter o trabalho plástico na conformação,  $W_c$ , deve-se integrar a Eq.(10) com relação ao volume.

$$W_c = \int_V \frac{K}{(\eta + 1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} dV. \quad (11)$$

Para resolver a Eq.(11), é necessário determinar a deformação efetiva  $\bar{\varepsilon}$  e o incremento de volume  $dV$ , em função da geometria de conformação. A deformação circunferencial  $\varepsilon_\theta$ , em função do ângulo de conformação  $\theta$  é determinada pela equação:

$$\varepsilon_\theta = \ln\left(\frac{R \cdot \theta}{R \cdot \text{Sen}\theta}\right) = \ln\left(\frac{\theta}{\text{Sen}\theta}\right). \quad (12)$$

Assumindo que não há deformação no comprimento da peça, ou seja  $\varepsilon_y = 0$ , logo da condição de volume constante e considerando a forma integral da Eq.(3), resulta que a deformação efetiva será definida pela equação.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_\theta. \quad (13)$$

Da geometria do processo de conformação, representado na Figura 1, e da constância de volume, determina-se o incremento de volume,  $dV$ , dado pela equação:

$$dV = R \cdot h \cdot L \cdot d\theta. \quad (14)$$

Substituindo-se as Eqs.(13) e (14) na Eq.(11), tem-se:

$$W_c = 2 \cdot R \cdot h \cdot L \cdot \frac{K}{(\eta + 1)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(\eta+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \ln\left(\frac{\theta}{\text{Sen}\theta}\right) \right]^{(\eta+1)} d\theta. \quad (15)$$

A solução da Eq.(15) resulta no trabalho plástico de conformação,  $W_C$ , dado pela equação:

$$W_C = \frac{2^{-2(1+\eta)} \cdot 3^{\frac{1}{2}(7+3\eta)} \cdot K.L.R.t.\pi^{2\eta}}{25(1+\eta)} \left[ \frac{225.\pi^3}{(3+2\eta)} + \frac{15.\pi^5.(1+\eta)}{8.(5+2\eta)} + \frac{\pi^7.\eta.(1+\eta)}{128.(7+2\eta)} \right]. \quad (16)$$

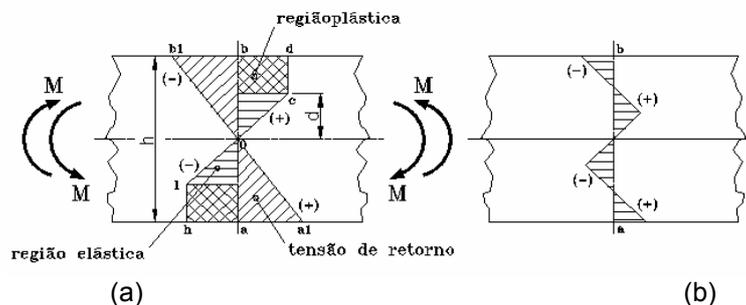
## 2.2 Trabalho Total de Conformação e Força de Conformação

O trabalho total de conformação da peça é definido pela Eq.(16). A força de conformação é obtida da Eq.(7), em que o deslocamento total da prensa será igual ao raio médio  $R$ , quando o ângulo de conformação  $\theta = 90^\circ$ . Resultando que a força de conformação para o processo em análise será definida pela equação:

$$F = \frac{W_C}{R}. \quad (17)$$

## 2.3 Tensões Residuais

A distribuição das tensões que ficam na peça e que está representada na Figura 2b equivale a aplicar um momento que é oposto ao do momento aplicado, Figura 2a, provocando uma redução da curvatura. Nota-se que a condição de aplicar o momento em sentido oposto, resulta em uma diminuição das tensões, mesmo porque a peça deformada não terá momentos externos aplicados.



**Figura 2.** a) Diagrama das tensões com escoamento plástico parcial da seção transversal submetida à flexão; b) Distribuição das tensões residuais.

Do fato de que todos os momentos externamente aplicados tenham sido retirados da peça, está claro que a peça ficará com tensões residuais que se auto-equilibram. Qualquer nova aplicação de carga deverá se iniciar a partir desse estado, em vez do estado livre de tensões. Após ser completamente descarregada a peça ficará com uma deformação residual chamada de deformação permanente.

Na Figura 2a está, representada, a geometria do modelo com as definições das regiões elástica e plástica. Assumindo-se que o raio de curvatura  $R$  é bem maior do que a espessura da chapa  $h$ , resulta que a deformação na espessura  $\epsilon_z = 0$ . Sendo a largura da chapa  $b$  bem maior do que a espessura  $h$ , resulta que a deformação longitudinal  $\epsilon_y = 0$ .

Considerando que a fibra neutra coincide com o eixo denominado  $0x$  e as tensões longitudinais elásticas são distribuídas linearmente na seção transversal de acordo com a equação elástica dada por:

$$\sigma_x = \frac{E.z}{R.(1-\nu^2)} = \frac{M.z}{I_y}. \quad (18)$$

Sendo: M o momento fletor por unidade de largura da chapa, E o modulo de elasticidade longitudinal do material,  $\nu$  o coeficiente de Poisson, z a distância da fibra neutra até a fibra em análise e  $I_y = h^3/12$  o momento de inércia da seção transversal para uma largura unitária.

Considerando o critério de escoamento de von Mises,<sup>(3,4)</sup> dado pela Eq.(2), para o estado plano de tensões, no sistema de eixos (xy), tem-se:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2. \quad (19)$$

Para as condições assumidas verifica-se que  $\sigma_y = \nu.\sigma_x$  logo, da Eq.(19), resulta que a tensão longitudinal será dada pela equação:

$$\sigma_x = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (20)$$

O momento elástico-plástico é obtido, considerando-se que a tensão na região elástica será definida pela Eq.(18) no intervalo de integração  $-d \leq z \leq d$  e a tensão na região plástica será definida pela Eq.(20) no o intervalo de integração  $d \leq z \leq (h/2)$ . Sendo a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  dada pela Eq.(6) para a deformação efetiva  $\bar{\epsilon} = z/R$ .

$$M = 2. \int_0^{h/2} \sigma_x z dz = 2. \int_0^d \frac{E.z^2}{R.(1-\nu^2)} dz + 2. \int_d^{h/2} \frac{K.z^{(\eta+1)}}{R^\eta.\sqrt{1-\nu+\nu^2}} dz. \quad (21)$$

Integrando-se a Eq.(21), resulta no momento elástico-plástico M, dado pela equação:

$$M = \frac{2.E.d^3}{3.R.(1-\nu^2)} + \frac{2.K}{(2+\eta).R^\eta.\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{(2+\eta)} - d^{(2+\eta)} \right]. \quad (22)$$

A tensão residual é obtida pela diferença entre a tensão devido ao momento elástico-plástico, Eq.(22), e a tensão no limite elástico-plástico dada pela Eq.(19), em que a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  será igual a tensão de escoamento Y, portanto, a tensão residual nas fibras externas da chapa, para  $z = \pm h/2$ , será definida pela equação:

$$\sigma_R = \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{E.d^3}{3.R.(1-\nu^2)} + \frac{K}{(2+\eta).R^\eta.\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{(2+\eta)} - d^{(2+\eta)} \right] \right\} - \frac{Y}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (23)$$

A altura d, da região elástica, é obtida igualando-se as Eqs.(18) e (20) para  $\bar{\sigma} = Y$ .

$$d = \frac{R.Y.(1-\nu^2)}{E.\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (24)$$

## 2.4 Recuperação Elástica

Um parâmetro importante para o processo de conformação é a recuperação elástica da chapa após o processo. No presente trabalho a recuperação elástica será obtida considerando o comportamento do material rígido plástico, conforme a abordagem apresentada por Mellor<sup>(3)</sup> e Al-Qureshi.<sup>(1)</sup> A relação entre o raio de conformação  $R$ , o raio final de conformação  $R_F$  e o raio de curvatura elástico  $R_E$  é definida pela equação:

$$\frac{R}{R_F} = 1 - \frac{R}{R_E} \quad (25)$$

Na região elástica, o momento é definido pela equação:

$$M_E = 2 \cdot \int_0^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{h/2} \frac{E \cdot z^2}{R_E \cdot (1 - \nu^2)} dz = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot R_E \cdot (1 - \nu^2)} \quad (26)$$

Em que na Eq.(26) a tensão  $\sigma_x$  é dada pela Eq.(18).

O momento elástico plástico é definido pela Eq.(22). A relação  $(R/R_E)$  dada pela Eq.(25) é obtida igualando-se as Eqs.(22) e (26), que após as simplificações, obtêm-se o raio final de conformação,  $R_F$ , dado pela equação:

$$R_F = \frac{R}{1 - \left\{ \frac{8 \cdot d^3}{h^3} + \frac{24 \cdot K \cdot (1 - \nu^2) \cdot R^{(1-\eta)}}{E \cdot h^3 \cdot (2 + \eta) \cdot \sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{(2+\eta)} - d^{(2+\eta)} \right] \right\}} \quad (27)$$

## 3 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos considerando-se os seguintes dados:

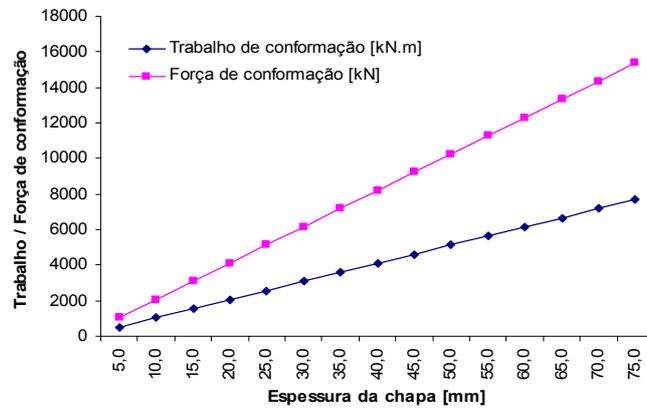
a) Dados geométricos considerados para a análise foram os seguintes:

Raio médio	$R = 500$ [mm]
Raio do punção	$R_p = 481$ [mm]
Comprimento da chapa	$L = 1000$ [mm]

b) Propriedades para o material da chapa metálica (3):

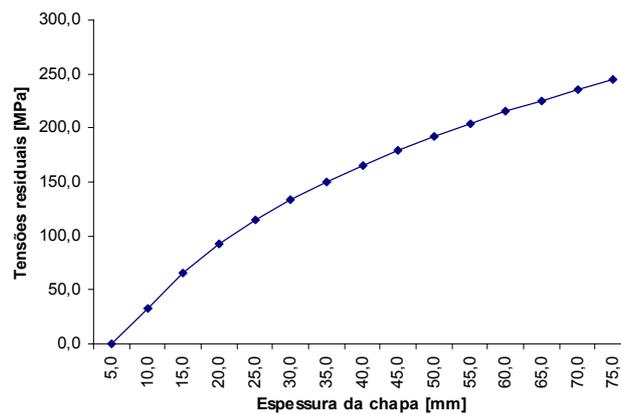
Coefficiente de resistência	$K = 693$ [MPa]
Coefficiente de encruamento	$\eta = 0,26$
Módulo de elasticidade	$E = 207$ [GPa]
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,27$
Tensão de escoamento	$Y = 250$ [MPa]
Tensão máxima	$\sigma_R = 420$ [MPa]

Na Figura 3 estão apresentados os resultados obtidos para o trabalho de conformação e para a força de conformação em função da espessura da chapa. Considera-se que a espessura máxima a ser conformada será igual a 10% do raio médio final da peça. Entretanto conforme Mellor<sup>(3)</sup> e Al-Qureshi<sup>(1)</sup> a espessura máxima pode ser igual a 2/3 do raio, limite que evita a estricção localizada e conseqüentemente a fratura da peça.



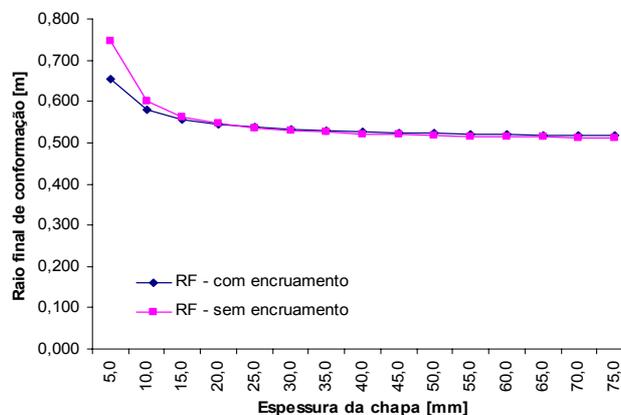
**Figura 3.** Trabalho / Força de conformação versus espessura da chapa.

Na Figura 4 os resultados obtidos para a tensão residual.



**Figura 4.** Tensão residual versus espessura da chapa.

Na Figura 5 os resultados obtidos para o raio final de conformação.



**Figura 5.** Raio final de conformação versus espessura da chapa.

## 4 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Nas Figuras 3, 4 e 5 estão apresentados os resultados teóricos obtidos para a análise do processo de conformação de chapas metálicas para a formação de uma peça em forma de “U” como parte do processo de fabricação de tubos. Através das equações desenvolvidas no presente trabalho é possível prever o comportamento do processo no que se refere à força necessária para a conformação, às tensões residuais inerentes do processo e a recuperação elástica da chapa com a determinação do raio final de conformação.

Na Figura 3 verifica-se que o trabalho de conformação e a força de conformação aumentam quase que linearmente com a variação da espessura da chapa para o mesmo raio de conformação. Situação semelhante ocorre com as tensões residuais, porém, para uma configuração não linear.

Uma característica interessante verifica-se na recuperação elástica, para o mesmo raio de conformação variando-se apenas a espessura da chapa a partir de 15[mm] e considerando-se o material sem encruamento e com encruamento, não se verificam variações significativas nos resultados obtidos, ou seja, para pequenas relações entre o raio de conformação e a espessura da chapa os comportamentos adotados para o material não apresentam variações, por outro lado, para grandes relações entre o raio de conformação e a espessura da chapa, espessuras menores que 15[mm], verifica-se uma diferença significativa no resultado da recuperação elástica. Tendo em vista os diferentes parâmetros que envolvem um processo de conformação pode-se considerar, que o modelo proposto apresenta os limites necessários para a execução do processo, podendo-se estimar a carga necessária e a capacidade do equipamento de conformação, como também definir o material em função das tensões residuais e a matriz de conformação em função da recuperação elástica da chapa.

### Agradecimentos

Agradecemos à Universidade de Taubaté através do departamento de Pesquisa e Pós-Graduação pelo apoio financeiro para a apresentação deste trabalho.

### REFERÊNCIAS

- 1 Al-Qureshi, H.A. **Processos e Mecanismos da Conformação dos Metais**, ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1991.
- 2 Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**, McGRAW-HILL, New York, 1959.
- 3 Mellor, P.B.; Johnson, W. **Engineering Plasticity**. Van Nostrand, New York, 1973.
- 4 Chakrabarty, J. **Theory of Plasticity**. McGraw-Hill, Singapore, 1988.

### BIBLIOGRAFIA

- 1 Wagoner, R.H.; Chenot J-L. **Fundamentals of Metal Forming**, Wiley, New York, 1997.
- 2 Rowe, G.W.; Sturgess C.E.N.; Hartley, P.; Pillinger, I. **Finite-Element Plasticity and Metalforming Analysis**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- 3 Moura Branco, C.A.G. **Mecânica dos Materiais**, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985.