

# MODELO MATEMÁTICO PARA A ANÁLISE DA CONFORMAÇÃO DE TUBOS DE PAREDES FINAS, CONSIDERANDO O ATRITO<sup>1</sup>

Anselmo Monteiro Ilkiu<sup>2</sup>  
Sidney Barbalho da Silva Braga<sup>3</sup>

## Resumo

O presente trabalho apresenta um modelo matemático para a análise da conformação de tubos de paredes finas utilizando uma matriz de conformação e considerando o atrito na interface entre a ferramenta e a peça. O modelo foi desenvolvido, com base nas teorias plásticas, pelo método da energia de conformação utilizando o critério de escoamento de von-Mises conforme apresentado por Chakrabarty,<sup>(1)</sup> Mellor<sup>(2)</sup> e Al-Qureshi (1999).<sup>(3-4)</sup> Para a análise dos resultados, foram consideradas, as propriedades geométricas que definem o tubo de parede fina e a matriz de conformação, bem como as propriedades do material. Os resultados teóricos para a tensão de von-Mises, para o trabalho de conformação por unidade de volume e para a força de conformação, são comparados com os resultados obtidos de uma simulação, através do Método dos Elementos Finitos, pelo programa comercial Ansys® versão 5.6 [1999]<sup>(5)</sup> no módulo não-linear. Foram utilizados elementos sólidos de formulação elástica para a matriz de conformação e formulação plástica para o tubo. O modelo para a simulação foi criado a partir das dimensões obtidas do modelo matemático. Pesquisadores verificaram as diversas condições de atrito em processos de conformação, pode-se destacar o trabalho do pesquisador Yuung-Hwa Lu (2004)<sup>(6)</sup> que analisou o processo de conformação de tubos utilizando uma matriz com geometria cônica.

**Palavras-chave:** Tubo; Conformação; Atrito; Elementos finitos.

## Abstract

The present work presents a mathematical model for the analysis of the forming of thin-walled tube using a forming die and considering the friction in the interface between the tool and the piece. The model was developed, with base in the plastic theories, for the method of the forming energy using the criterion of von-Mises as presented by Chakrabarty,<sup>(1)</sup> Mellor<sup>(2)</sup> and Al-Qureshi (1999).<sup>(3-4)</sup> For the analysis of the results, they were considered, the geometric properties that they define the wall tube dies and the forming die, as well as the properties of the material. The theoretical results for the von-Mises tension, for the forming work for unit of volume and for the forming load, they are compared with the obtained results of a simulation, through the Method of the Finite Elements, for the commercial program Ansys® version 5.6 [1999]<sup>(5)</sup> in the no-lineal module. Solid elements of elastic formulation were used for the forming die and plastic formulation for the tube. The model for the simulation was created starting from the obtained dimensions of the mathematical model.

**Key words:** Tube; Forming.; Friction; Finite elements.

<sup>1</sup> Contribuição técnica apresentada no 61º Congresso Anual da ABM, de 24 a 27 de julho de 2006, Rio de Janeiro – RJ

<sup>2</sup> Professor Assistente Doutor dos Departamentos de Engenharia Civil/Mecânica da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

<sup>3</sup> Engenheiro Mecânico e aluno do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

# 1 INTRODUÇÃO

No mecanismo do processo de expansão de tubos, quando a parede do mesmo desliza sobre o raio da matriz, Figura 1, tem-se o aumento da carga no sistema biaxial de tensões que pode ou não levar a fratura. A deformação crítica dependerá, das condições geométricas e de fricção, resultando do processo, um tubo com maior diâmetro e com a diminuição da espessura da parede.

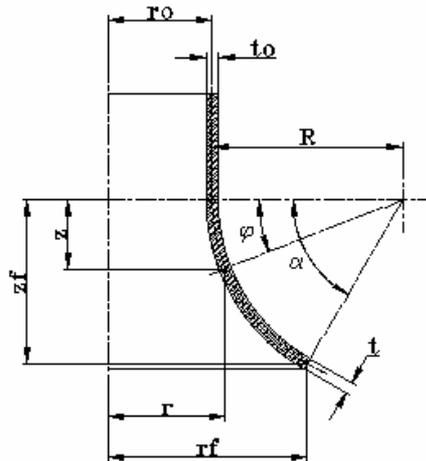


Figura 1. Geometria do processo de conformação.

Sendo:  $r_0$  é o raio médio antes da conformação;  $t_0$  é a espessura inicial da parede;  $R$  é o raio externo médio;  $\alpha$  é o ângulo máximo de conformação;  $r_f$  é o raio médio final após a conformação e  $t$  é a espessura final da parede do tubo.

Para o balanço energético, partiu-se das considerações propostas por Al-Qureshi<sup>(4)</sup> que foram usadas na presente análise.

A energia envolvida no processo consta das seguintes parcelas:

- I. Do trabalho de deformação ( $W_c$ );
- II. Do trabalho devido as forças externas ( $W_e$ );
- III. Da energia perdida devido ao atrito entre o tubo e a matriz ( $W_a$ ).

O somatório destas parcelas deve ser nulo ( $\Sigma W = 0$ ) e isto estabelece uma relação de interdependência das variáveis do processo. Todavia o valor crítico para a carga mínima de conformação é fornecido através do valor do raio crítico onde, não se considera aqui a condição para a flambagem e fratura.

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um modelo matemático capaz de fornecer uma estimativa da carga de máquina necessária para conformar o tubo de paredes finas para diferentes condições de atrito.

Algumas hipóteses serão colocadas seguidas do desenvolvimento teórico.

## 1.1 Hipóteses

A primeira hipótese se deve ao fato de estar trabalhando com tubos de paredes finas, para os quais a teoria de membrana é aplicável segundo Timoshenko e Krieger (7). Assim, fica desprezada a variação de tensões ao longo da parede da seção reta do tubo definindo-se o estado plano de tensões.

Em segundo lugar, como se está trabalhando no campo plástico, desprezando as deformações elásticas, admite-se que o material seja incompressível ou, que a soma

dos incrementos das deformações principais seja nula para qualquer estágio de conformação.

$$d\varepsilon_r + d\varepsilon_z + d\varepsilon_t = 0. \quad (1)$$

Conforme o critério de escoamento de von-Mises apresentado por Chakrabarty<sup>(1)</sup> e Mellor<sup>(2)</sup> onde, considerando-se as direções principais, a tensão e deformação efetivas serão definidas pelas equações:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_z - \sigma_t)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(d\varepsilon_r - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_r - d\varepsilon_t)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_t)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Uma vez que os eixos principais dos incrementos sucessivos de deformação não têm rotação em relação ao elemento que está sendo deformado, pode-se passar a utilizar a Eq.(1) em sua forma integral conforme apresentado por Mellor.<sup>(2)</sup>

$$\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_t = 0. \quad (4)$$

Outra hipótese é que o nível de encruamento do material é função somente do trabalho plástico total e independente do processo de deformação. Para o material isotrópico e desprezando-se o efeito Bauschinger, conforme apresentado por Al-Qureshi,<sup>(4)</sup> tem-se então que a tensão efetiva será função do trabalho plástico.

$$\bar{\sigma} = f(W_p). \quad (5)$$

No presente trabalho será adotada a expressão de Hollomon,<sup>(1-3)</sup> onde K é o coeficiente de resistência e  $\eta$  o coeficiente de encruamento.

$$\bar{\sigma} = K.(\bar{\varepsilon})^\eta. \quad (6)$$

A tensão de cisalhamento para o escoamento plástico do material é obtida através do critério de escoamento de von-Mises, conforme analisado por Al-Qureshi<sup>(4)</sup> e Wagoner e Chenot,<sup>(8)</sup> podendo ser expressa da seguinte forma:

$$\tau = m. \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} = \frac{m}{\sqrt{3}}.K.(\bar{\varepsilon})^\eta. \quad (7)$$

Sendo m o fator de atrito na interface entre a ferramenta e a peça.

Como hipótese final referente ao carregamento, em que a carga aplicada pela prensa (hidráulica) tem velocidade tal que o processo será considerado quase estático.

## 2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

No modelo proposto, toda a energia fornecida para a conformação dos tubos provém do trabalho realizado pela prensa, e uma vez que se conheça a relação carga-deslocamento ao longo do processo, a sua avaliação é imediata e será dada pela equação.

$$W_c + W_a - W_e = 0. \quad (8)$$

Sendo  $W_e = F \cdot \delta$  em que  $F$  é a força de conformação e  $\delta$  o deslocamento da prensa. São duas as principais parcelas constitutivas da energia absorvida considerada para o desenvolvimento teórico: a) deformação do material  $W_c$  e b) atrito  $W_a$ , em função dos parâmetros geométricos do tubo conformado e do material.

### 2.1 Deformação do Material

Para avaliar a energia adsorvida pela deformação do material, parte-se da relação entre o incremento de trabalho plástico por unidade de volume e das tensões e deformações efetivas, expressa pela equação:

$$dW_p = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}. \quad (9)$$

Uma vez que existe constância entre as relações dos incrementos de deformação ao longo do processo de conformação, pode-se trabalhar com as deformações na sua forma integral, o que permite determinar o trabalho plástico por unidade de volume entre os estágios inicial e final da conformação. Substituindo-se a Eq.(6) na Eq.(9), têm-se:

$$\int_{W_0}^{W_f} dW_p = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_f} K \cdot (\bar{\varepsilon})^\eta d\bar{\varepsilon}. \quad (10)$$

Sendo que o trabalho inicial  $W_0$  e a deformação inicial  $\varepsilon_0$  são nulos, a solução da equação resultante será dada por:

$$W_p = \frac{K}{(\eta + 1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)}. \quad (11)$$

Integrando-se a Eq.(11) com relação ao volume, tem-se:

$$W_c = \int_V \frac{K}{(\eta + 1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} dV. \quad (12)$$

Para resolver a Eq.(12), é necessário determinar a deformação efetiva e o incremento de volume em função da geometria de conformação. A deformação  $\varepsilon_r$  no raio da peça é definida pela equação:

$$\varepsilon_r = \ln\left(\frac{r}{ro}\right) = \ln\left[1 + \frac{R}{ro} \cdot (1 - \cos\varphi)\right]. \quad (13)$$

Conseqüentemente, a deformação  $\varepsilon_z$  no comprimento é definida pela equação:

$$\varepsilon_z = \ln\left(\frac{z}{zo}\right) = \ln\left(\frac{\varphi}{\text{Sen}\varphi}\right). \quad (14)$$

A deformação  $\varepsilon_t$  na espessura da parede do tubo é determinada da condição de volume constante nas deformações plásticas, Eq.(4).

$$-\varepsilon_t = \ln\left(\frac{t}{to}\right) = \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \ln\left\{\frac{\varphi}{\text{Sen}\varphi} \cdot \left[1 + \frac{R}{ro} \cdot (1 - \cos\varphi)\right]\right\}. \quad (15)$$

Da condição de volume constante e considerando a forma integral da Eq.(3), resulta que a deformação efetiva será definida pela equação.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z^2}. \quad (16)$$

Da geometria do processo de conformação, representado na Figura(1), e da constância de volume, o incremento de volume será definido pela equação:

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot ro \cdot to \cdot d\varphi. \quad (17)$$

Substituindo-se a Eq.(17) na Eq.(12), tem-se:

$$W_C = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot ro \cdot to \cdot \frac{K}{(\eta + 1)} \int_0^\alpha (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} d\varphi. \quad (18)$$

## 2.2. Atrito

A energia dissipada pelo atrito, será obtida, em função da tensão de cisalhamento no escoamento plástico  $\tau$  definida pela Eq.(7), do deslocamento do elemento na região de contato  $d\xi$  e do incremento de deformação efetiva  $d\bar{\varepsilon}$ .

$$dW_f = \tau \cdot d\xi \cdot d\bar{\varepsilon} = \frac{m}{\sqrt{3}} \cdot K \cdot (\bar{\varepsilon})^\eta \cdot d\xi \cdot d\bar{\varepsilon}. \quad (19)$$

Integrando-se a Eq.(19) entre os estágios inicial e final de conformação, tem-se:

$$\int_{W_0}^{W_f} dW_f = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_f} \frac{m}{\sqrt{3}} K \cdot (\bar{\varepsilon})^\eta d\xi d\bar{\varepsilon}. \quad (20)$$

Sendo que o trabalho inicial  $W_0$  e a deformação inicial  $\varepsilon_0$  são nulos, a solução da equação resultante será dada por:

$$W_f = \frac{m.d\xi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K}{(\eta+1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)}. \quad (21)$$

Para obter o trabalho devido à força de atrito, deve-se integrar a Eq.(21) com relação à área da superfície de contato.

$$W_a = \int_s \frac{m.d\xi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K}{(\eta+1)} \cdot (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} dS. \quad (22)$$

A superfície de contato  $dS$  será definida considerando o incremento de área da superfície definida pelos raios médios na região de conformação, portanto:

$$dS = 2.\pi.R.ro.d\varphi. \quad (23)$$

Substituindo-se as Eq.(23) na Eq.(22) para  $d\xi = R.d\varphi$ , tem-se:

$$W_a = \frac{2.\pi.R^2.ro.m.K}{\sqrt{3}(\eta+1)} \cdot \int_0^\alpha \int_0^\alpha (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} d\varphi.d\varphi. \quad (24)$$

### 2.3 Trabalho e Força de Conformação

O trabalho total de conformação do tubo é definido pela Eq.(7), portanto, somando-se as Eqs.(17) e (24), tem-se:

$$W = F.\delta = 2.\pi.R.ro.\frac{K}{(\eta+1)} \left[ to.\int_0^\alpha (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} d\varphi + \frac{m}{\sqrt{3}}.R.\int_0^\alpha \int_0^\alpha (\bar{\varepsilon})^{(\eta+1)} d\varphi.d\varphi \right]. \quad (25)$$

A força de conformação é obtida resolvendo-se a Eq.(25), para o deslocamento da prensa  $\delta = R.Sen\alpha$ .

### 3 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos através das equações desenvolvidas no presente trabalho e por simulação pelo Método dos Elementos Finitos utilizando o programa comercial Ansys® versão 5.6.<sup>(5)</sup>

Os dados geométricos considerados para a análise foram os seguintes: raio médio do tubo antes da conformação  $ro = 39,27\text{mm}$ ; raio  $R = 74,93\text{mm}$ ; espessura inicial do tubo  $to = 2,54\text{mm}$ ; ângulo de conformação  $\alpha = 32^\circ$  que equivale a 1,2 do ângulo obtido para a instabilidade plástica em tração simples.

Para o tubo foram consideradas as propriedades para o material ABNT 1006:<sup>(9)</sup> coeficiente de resistência  $K = 510\text{MPa}$ ; coeficiente de encruamento  $\eta = 0,22$ ; módulo

e elasticidade  $E = 207\text{GPa}$ ; coeficiente de Poisson  $\nu = 0,27$ ; tensão de escoamento  $Y = 153\text{MPa}$ ; tensão máxima  $\sigma_R = 300\text{MPa}$ .

### 3.1 Resultados Teóricos

Na Figura 2 estão representados os gráficos dos resultados teóricos para a força de conformação obtida através da solução da Eq.(25) e na Figura 3 estão representados os gráficos dos resultados teóricos do trabalho de conformação por unidade de volume obtido das Eqs.(10) e (21), sendo a Eq.(21) dividida por  $d\xi$ . Os gráficos foram obtidos para  $m = 0,0$  condição deslizando e para  $m = 1,0$  condição de aderência entre a superfícies de contato.

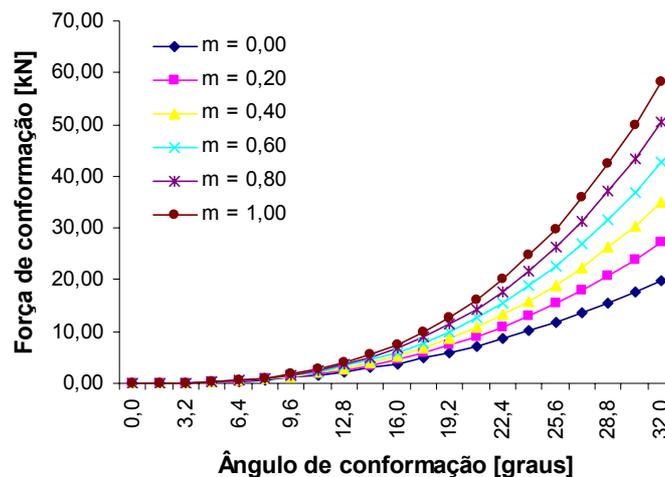


Figura 2. Força de conformação versus ângulo de conformação  $\alpha$ .

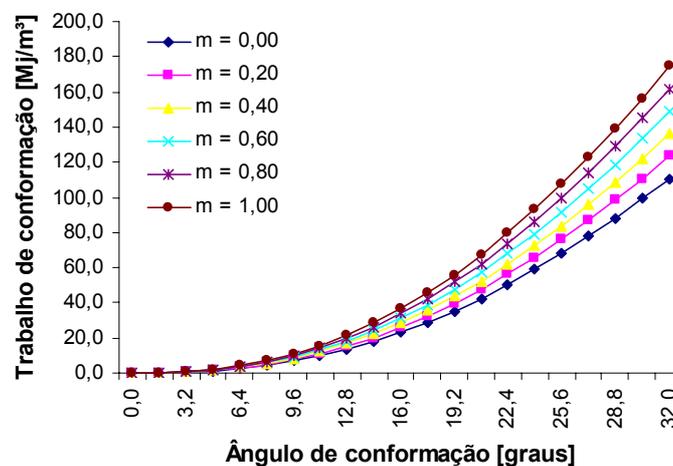


Figura 3. Trabalho de conformação por unidade de volume versus ângulo de conformação  $\alpha$ .

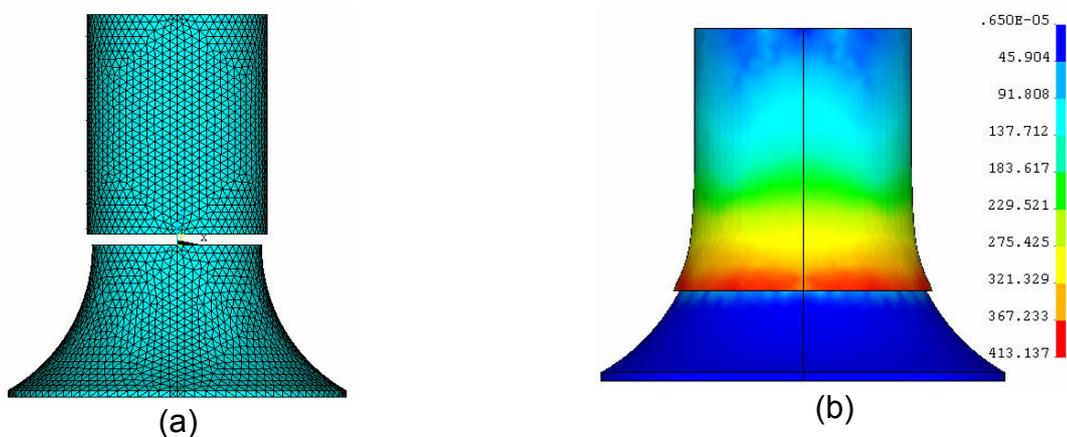
### 3.2 Simulação MEF

Os resultados da simulação numérica pelo Método dos Elementos Finitos foram obtidos utilizando o programa comercial Ansys® versão 5.6<sup>(5)</sup> no módulo não-linear. Para a modelagem da ferramenta de conformação utilizou-se o elemento sólido SOLID45 e para a modelagem do tubo utilizou-se o elemento sólido VISCOSOLID107. Na região de contato entre o tubo e a ferramenta, foram adotados os seguintes elementos CONTA174 e TARGE170, respectivamente.

No modelo de simulação considera-se o atrito de Coulomb ( $\mu$ ), portanto, para a determinação dos coeficientes de atrito considera-se uma conversão do fator de atrito na interface ( $m$ ) para o coeficiente de atrito de Coulomb ( $\mu$ ). Da lei de Coulomb, a tensão devido ao atrito na interface entre a ferramenta e a peça é proporcional à tensão normal na interface. Considerando-se, no processo de conformação plástica, que a tensão normal será igual a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$ , resulta que a tensão devido ao atrito na interface será igual a  $\tau = \mu \bar{\sigma}$ .

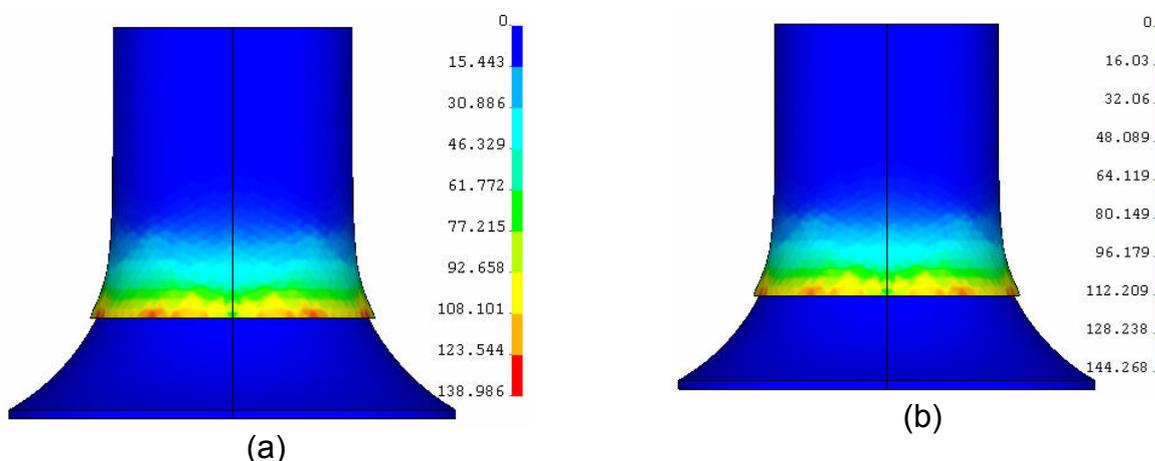
Igualando-se a tensão devido ao atrito com a Eq.(7), resulta que o coeficiente de atrito de Coulomb, considerado na simulação, será igual a  $\mu = m / \sqrt{3}$ .

*Malha dos elementos finitos e tensão de von-Mises:* Na Figura 4a está representada a malha dos elementos finitos adotados para a análise e na Figura 4b as tensões de von-Mises para o ângulo de conformação de  $\alpha = 32^\circ$ .



**Figura 4.** (a) Malha dos elementos finitos; (b) Tensões de von-Mises.

*Trabalho de conformação:* Na Figura 5, estão apresentados, os resultados obtidos para o trabalho de conformação por unidade de volume em função do ângulo de conformação  $\alpha$  e dos limites para coeficiente de atrito  $\mu$ . Para  $m = 0,0$  ( $\mu = 0,0$ ) condição deslizante e para  $m = 1,0$  ( $\mu = 0,577$ ) condição de aderência entre a superfícies de contato.



**Figura 5.** Trabalho de conformação por unidade de volume  $\text{MJ/m}^3$  : (a) para  $\mu = 0,0$  e (b) para  $\mu = 0,577$ .

## 4 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Comparando-se os resultados teóricos e de simulação para a força de conformação máxima, resulta no gráfico apresentado na Figura 6 para o ângulo de conformação  $\alpha$  em função do fator de atrito na interface.

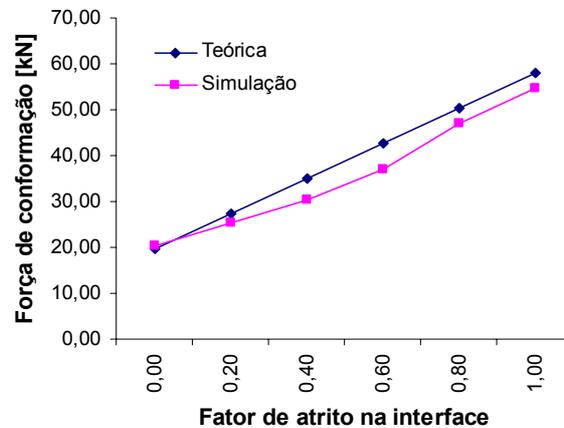


Figura 6. Força de conformação versus fator de atrito.

Os resultados apresentados, para a força de conformação, entre os limites do fator de atrito  $m = 0,0$  e  $m = 1,0$ , podem ser considerados satisfatórios, em função, das diversas hipóteses simplificadoras assumidas para o desenvolvimento do modelo. As tensões de von-Mises, obtidas tanto pela análise teórica como pela simulação Figura 4b, não sofreram variações significativas mesmo porque o modelo de simulação levou em consideração as tensões obtidas da Eq.(6). Comparando-se os resultados teóricos e de simulação para o trabalho de conformação máxima por unidade de volume, resulta no gráfico apresentado na Figura 7 para o ângulo de conformação  $\alpha$  em função do fator de atrito na interface.

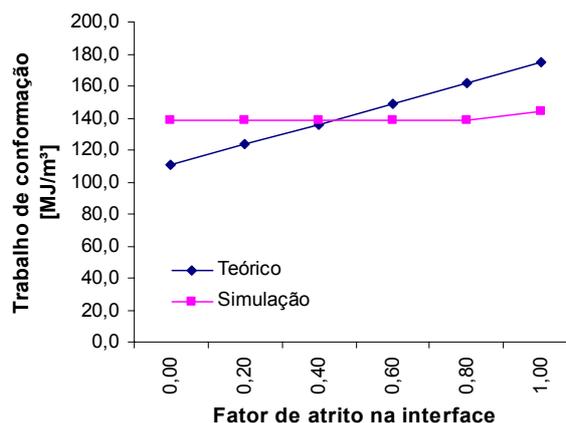


Figura 7 – Trabalho de conformação por unidade de volume versus fator de atrito.

Na simulação, o programa de elementos finitos, determina o trabalho total realizado por todas as forças envolvidas no processo de conformação. No modelo matemático, as hipóteses adotadas, simplificam a determinação do trabalho de conformação resultando nas diferenças apresentadas na Figura 7.

Observou-se que a espessura varia ao longo do processo de conformação sendo esta variação uma função direta das deformações radiais e longitudinais não sofrendo influência das condições de atrito na interface entre a ferramenta e a peça. A aplicação do Método dos Elementos Finitos, no módulo não linear, para a análise do processo de conformação, apresentou-se viável para a previsão dos resultados importantes para o processo. As hipóteses e considerações assumidas no presente trabalho apresentam resultados satisfatórios quando comparados aos resultados obtidos pela simulação.

Conclui-se, que as hipóteses adotadas, podem ser utilizadas como parâmetros para a previsão do processo de conformação, considerando o efeito do atrito na interface entre a ferramenta e a peça.

## **Agradecimentos**

Agradecemos à Universidade de Taubaté através do departamento de Pesquisa e Pós-Graduação pelo apoio financeiro para a apresentação deste trabalho.

## **REFERÊNCIAS**

- 1 Chakrabarty, J. **Theory of Plasticity**. McGraw-Hill, Singapore, 1988.
- 2 Mellor, P.B.; Johnson, W. **Engineering Plasticity**. Van Nostrand, 1973.
- 3 Al-Qureshi, H.A. Elastic-plastic analysis of tube bending. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, n.39, p.87-104, 1999.
- 4 Al-Qureshi, H.A. **Processos e Mecanismos da Conformação dos Metais**, ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1991.
- 5 Ansys, 1999, ANSYS User's Manuals, Vols. 1(Procedures), 2 (Commands), 3 (Elements) and 4 (Theory), Swanson Analysis Systems Inc.
- 6 Lu, Yuung-Hwa. Study of tube flaring ratio and strain rate in the tube flaring process. **Finite Elements in Analysis and Design**, n.40, p.305-318, 2004.
- 7 Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**, McGRAW-HILL, New York, 1959.
- 8 Wagoner, R.H.; Chenot J-L. **Fundamentals of Metal Forming**, Wiley, 1997.
- 9 Button, S.T.; Bortolussi, R. Estudo do Processo de Embutimento Profundo de Copo Pelo Método dos Elementos Finitos. **RBCM – Journal of Braz. Soc. Mechanical Engineers**, v.XXI, n.2, p.355-363, 1999.
- 10 Rowe, G.W.; Sturgess C.E.N.; Hartley, P.; Pillinger, I. **Finite-Element Plasticity and Metalforming Analysis**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.