

SIMULAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE BARRAS E BOLAS EM MOINHOS¹

*Henrique Gonçalves Teixeira²
Dirceu Valadares Nascimento²
Antônio Eduardo Clark Peres³
Roberto Galery⁴*

Resumo

É de suma importância conhecer como a trajetória dos corpos moedores em moinhos tubulares se comporta para que atuações de processo nesses equipamentos levem a pontos operacionais de maior eficiência. Para o caso de moinhos de bola, Powell⁽¹⁾ deduziu de forma detalhada a trajetória de uma bola isolada, no entanto não estendeu este estudo para o caso de barras. Dado a importância e utilização deste trabalho, o mesmo foi complementado para que se possa simular a trajetória de uma barra no moinho de acordo com altura e ângulo do lifter, rotação do moinho e diâmetro da barra.

Palavras-chave: Moinhos; Barras; Bolas; Simulação.

MILL SIMULATION OF MEDIA TRAJECTORY IN ROD AND BALL MILLS

Abstract

It is highly important to know how the trajectory of the grinding media in tumbling mills behaves so that engineering actions can lead to operating points of better efficiency. In case of ball mills, Powell⁽¹⁾ described in a detailed manner the path of a ball inside the mill; however this study was not extended to the case of rods. Given the importance and use of this work, it was complemented so that we can simulate the path of a bar in the mill according to height and angle of the lifter, rotation of the mill and bar diameter.

Key words: Mills; Rod; Ball; Simulation.

¹ *Contribuição técnica ao 43º Seminário de Redução de Minério de Ferro e Matérias-primas, 14º Simpósio Brasileiro de Minério de Ferro e 1º Simpósio Brasileiro de Aglomeração de Minério de Ferro, 1 a 4 de setembro de 2014, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

² *Engenheiro de Minas, Engenheiro de Processo. UFMG, Araxá, MG, Brasil.*

³ *Engenheiro de Minas, Engenheiro de Processo. UFMG, Araxá, MG, Brasil.*

⁴ *Engenheiro de Minas. ,Ph .D. Professor. UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil. Engenheiro de Metalurgista ,Dr. Professor. UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

1 INTRODUÇÃO

Para saber como os corpos moedores se comportam dentro de um moinho pode ser necessário softwares complexos e de custo elevado e, mesmo que algumas empresas os possuam, estes ficam limitados a poucas pessoas. Normalmente a equipe de operação a qual está em contato direto com a etapa de moagem não possui essa ferramenta, dificultando o entendimento de como as variáveis como altura do lifter, ângulo de ataque, velocidade e enchimento do moinho podem determinar a eficiência desta etapa.

Pensando nessas dificuldades complementou-se o trabalho de Powell⁽¹⁾ para que se possa, através de modelos matemáticos, simular a trajetória das barras nos moinhos. Desta forma poderá criar uma planilha eletrônica, como o Microsoft Excel[®], para que todas as pessoas possam ter um melhor entendimento do comportamento da trajetória do corpos moedores nos moinhos.

2 NOMENCLATURA DESTA SECÇÃO

Aqui encontram todas as variáveis utilizadas nas fórmulas da simulação das cargas moedoras.

2.1 Variáveis Gerais

a = raio da barra.

α = aceleração angular da barra.

$\delta = \sin \alpha (R - h) - a \equiv$ uma constante.

f = força de fricção entre a face do lifter e a barra.

F = força resultante na barra.

g = aceleração gravitacional ($9,8 \text{ m.s}^{-2}$).

h = altura radial do lifter.

I = momento de inércia.

m = massa da barra.

N = força normal exercida pelo lifter na barra.

R = raio interno do moinho.

r = distância do centro do moinho ao centro da barra.

\vec{r} = vetor direcionado do centro do moinho ao centro da barra.

$r_0 = R - a$.

$s = r \cdot \cos \beta$.

\vec{s} = vetor paralelo a face do lifter, direcionado da extremidade a base.

\dot{s} = velocidade linear da barra ao longo da face do lifter.

\ddot{s} = aceleração linear da barra ao longo da face do lifter.

t = tempo.

τ = tempo de deslizamento.

Γ = Torque.

μ_s = coeficiente estático de fricção entre a barra e o lifter.

μ_k = coeficiente cinético de fricção entre a barra e o lifter.

v = velocidade líquida da barra no sistema de coordenadas cartesiano.

Ω = velocidade angular do moinho.

x = coordenada cartesiana horizontal do centro da barra.

y = coordenada cartesiana vertical do centro da barra.

\parallel = paralelo.

\perp = vertical.

2.2 Ângulos

α = entre a face do lifter e a linha radial que passa através da extremidade do lifter bar.

β = entre o vetor do raio da barra e a face do lifter.

γ = subtendido por \vec{s} e o eixo x .

ϕ = subtendido por \vec{r} e o eixo x .

ρ = entre a face do lifter e sua base.

σ = para a horizontal do vetor velocidade da barra.

θ = subtendido no centro, entre a extremidade do lifter e o eixo x .

λ = subtendido no ponto de contato da barra no lifter, entre o centro da barra e a base do lifter.

κ = ângulo de fricção, equivalente a μ_s .

2.3 Subscrito

0 = o ponto de equilíbrio.

L = extremidade do lifter.

cm = aproximadamente o centro de massa.

m = máximo.

I = ponto de transição de rolamento para deslizamento.

ρ = ponto de contato entre a barra e a face do lifter.

x = na direção do eixo x .

y = na direção do eixo y .

E = ponto no qual a barra colide com a carcaça do moinho.

\parallel = paralelo a.

r = componente radial.

\perp = perpendicular a.

3 SIMULAÇÃO DA CARGA MOEDORA

Uma barra em repouso no lifter (barra elevadora) e contra a carcaça do moinho alcança o ponto de equilíbrio quando o somatório das forças atuantes nela é igual a zero. Aqui o conjunto de forças paralelas (\parallel) e radialmente perpendiculares (\perp) ao movimento da barra é nulo.⁽¹⁾

3.1 Ponto de Equilíbrio

Nas Figuras 1 e 2 as forças atuando na barra são as seguintes:

- força gravitacional, atuando verticalmente para baixo (mg);
- força centrífuga direcionada radialmente para fora da carcaça do moinho ($m\Omega^2r$);
- força normal do lifter (N); e
- força de fricção entre a barra e o lifter a qual é paralela à face em direção a carcaça do moinho (f).

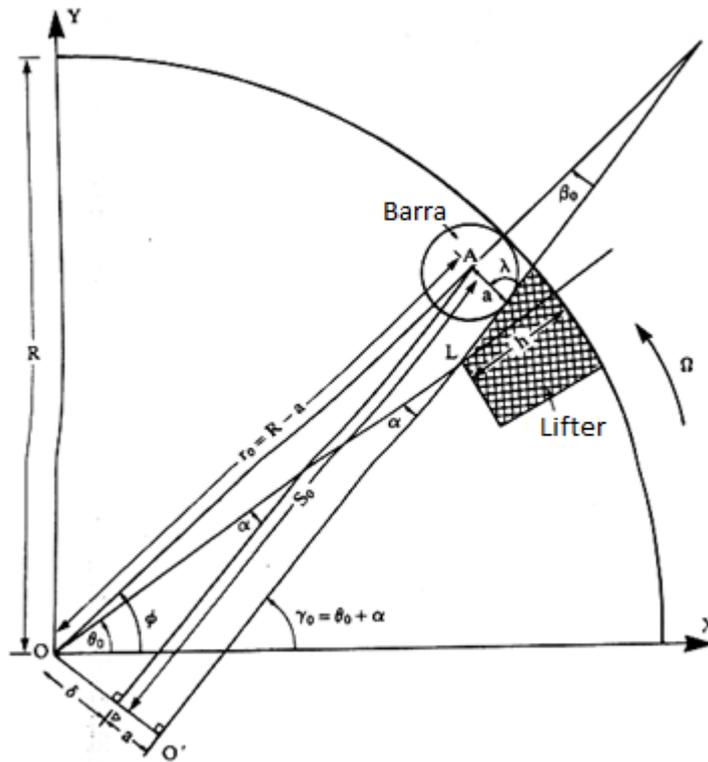


Figura 1. Barra sobre o lifter em um moinho rotativo.⁽¹⁾

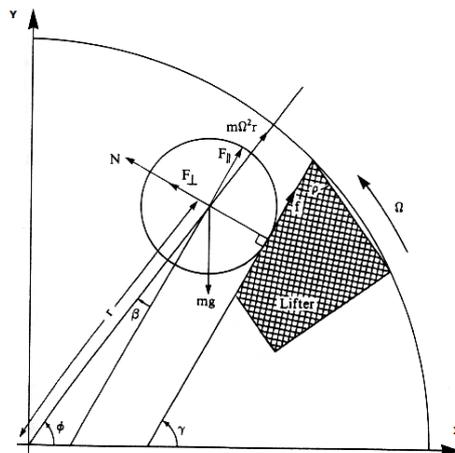


Figura 2. Forças sobre uma barra em contato com o lifter.⁽¹⁾

Todos os símbolos que são utilizados neste trabalho estão listados no início deste e também estão demonstrados nas Figuras 1 e 2. A posição do centro da barra no ponto de equilíbrio é obtida por:

$$\gamma_0 = k - \lambda + \arccos\left(-\frac{\Omega^2}{g} r_0 \cdot \sin(\lambda + \beta_0 - k)\right) \quad \text{Eq.1}$$

3.2 Rolamento da Barra Sobre a Face do Lifter

Considerando que a barra está sujeita a uma velocidade angular constante e, admitindo, que as forças atuantes nela possam ser comparadas a condição desta rolando em um plano inclinado, as seguintes equações podem ser derivadas da Figura 3.

Torque sobre o centro de massa (cm):

$$\Gamma_{cm} = I_{cm}\alpha \quad \text{Eq.2}$$

Onde $\gamma = \gamma_0 + \Omega^2 t$.

A única força que atua na distância do centro de massa é f , então:

$$f \cdot a = I_{cm}\alpha$$

Para uma barra:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} ma^2$$

Para uma esfera:

$$I_{cm} = \frac{2}{5} ma^2$$

Este momento de inércia no centro de massa é o único fator que diferencia entre o movimento de uma barra e uma bola quando estão rolando sobre um plano.

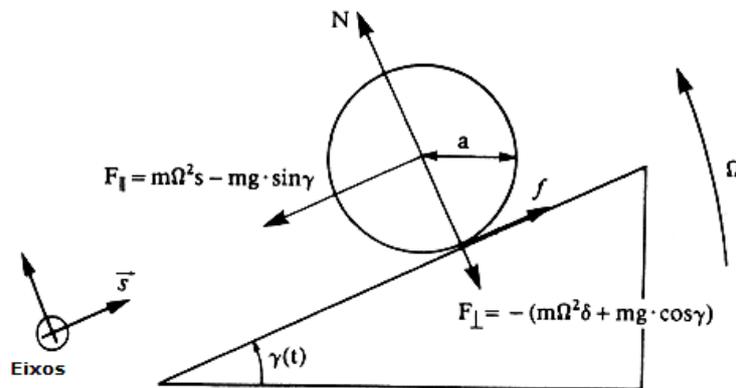


Figura 3. Forças sobre uma barra rolando, para baixo, de uma encosta de inclinação variável, $\gamma(t)$.⁽¹⁾

Através da Figura 3 as seguintes equações podem de derivadas:

$$N - mg \cdot \cos \gamma - m\Omega^2 \delta = 0 \quad \text{Eq.3}$$

$$m \Omega^2 s - mg \cdot \sin \gamma + f = m\ddot{s} \quad \text{Eq.4}$$

Enquanto a barra não desliza a aceleração angular é diretamente proporcional à aceleração linear por:

$$\alpha = -\frac{\ddot{s}}{a} \quad \text{Eq.5}$$

Onde \ddot{s} é negativo para um valor positivo de α , pois é um resultado de orientação dos eixos. Assim:

$$f = -\frac{m\ddot{s}}{2} \quad \text{Eq.6}$$

A substituição desta equação na Equação 4 obtém-se:

$$\ddot{s} - \frac{2}{3}\Omega^2 s = -\frac{2}{3}g \cdot \sin \gamma \quad \text{Eq.7}$$

Esta equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem na qual as condições consistente de fronteira são conhecidas, onde de $s(0)=s_0$ e $\dot{s}_{t=0} = 0$ (pois a barra ainda não iniciou o rolamento) possui a seguinte solução:

$$s(t) = \left(s_0 - \frac{2g}{5\Omega^2} \sin \gamma_0 \right) \cdot \cosh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega t - \frac{\sqrt{6}g}{5\Omega^2} \cdot \cos \gamma_0 \cdot \sinh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega t + \frac{2g}{5\Omega^2} \cdot \sin \gamma \quad \text{Eq. 8}$$

A velocidade da barra é descrita pela Equação 9.

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega \left(s_0 - \frac{2g}{5\Omega^2} \cdot \sin \gamma_0 \right) \cdot \sinh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega t - \frac{2g}{5\Omega} \cdot \left(\cos \gamma_0 \cdot \cosh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega t - \cos \gamma \right) \quad \text{Eq.9}$$

Estas equações descrevem a posição e velocidade da barra para rolamento puro descendo a face do lifter.⁽¹⁾

3.3 Ângulo Máximo para Rolamento Puro

Há um limite na força (f) dada por $\mu_s N$, então para um dado coeficiente de fricção (μ_s) e parâmetros de moagem há um ângulo máximo (γ_m) acima do qual o rolamento puro irá ocorrer. Além desse ângulo a aceleração linear também é alta para segurar a barra, esta, portanto, deve iniciar a deslizar sobre a face do lifter. O ângulo teórico máximo para rolamento puro pode ser calculado pelas equações que expressam as forças no rolamento da barra e a aceleração dela. Pela substituição da Equação 7 na Equação 4 obtém-se:

$$f = \frac{m}{3} (g \cdot \sin \gamma - \Omega^2 s) \quad \text{Eq.10}$$

$f \leq \mu_s N$, então das Equações 3 e 10:

$$\sin \gamma_m - 3\mu_s \cdot \cos \gamma_m \leq \frac{\Omega^2}{g} (3\delta\mu_s + s) \quad \text{Eq.11}$$

Contudo $s=s(t)$, portanto isto somente pode ser resolvido numericamente. A solução da Equação 11 quando $s=s_L$ resulta em γ_m (min), o qual é o valor mínimo possível de γ_m no limite. A Equação 8 também pode ser resolvida numericamente para $s= s_L$. Contudo se $\gamma_L > \gamma_m$ (min), estão deverá haver uma transição de rolamento puro para rolamento e deslizamento.⁽¹⁾

A resolução destas equações pode-se encontrada utilizando a ferramenta solver localizada no Microsoft Excel[®].

3.4 Transição do Rolamento Puro para Rolamento Combinado com Deslizamento

A resolução simultânea da Equação 11 e da Equação 8 para γ_m e $s(t)$ resulta o limite do rolamento puro. O resultado da equação pode ser resolvido aumentando t até a desigualdade estar satisfeita para $t = t_I$, onde t_I é o tempo no qual ocorre a transição de rolamento para deslizamento.

$$\frac{3}{5} \sin \gamma_m - 3\mu_s \cdot \cos \gamma_m \leq \frac{3\Omega^2}{g} \delta\mu_s + \left(\frac{s_0}{g} \Omega^2 - \frac{2}{5} \sin \gamma_0 \right) \cosh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega^2 t_I - \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \cos \gamma_0 \cdot \sinh \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Omega^2 t_I \quad \text{Eq.12}$$

Utilizando as Equações 8 e 9 a localização e velocidade da barra pode ser calculada no ponto de transição.

3.5 Rolamento Combinado e Deslizamento

Uma vez que a barra começa a deslizar seu movimento é retardado pelas forças decorrentes do coeficiente cinético de fricção. Uma combinação de rolamento e deslizamento resulta em um movimento linear que é equivalente ao deslizamento puro sobre fricção. Como há um torque sobre o centro de massa deverá haver uma aceleração angular sobre o centro de massa, mas nas condições de deslizamento isto não é dependente do movimento linear. Alguma da energia gravitacional que poderia ser perdida devido à fricção, no caso de um bloco de fundo chato, é de outra maneira convertida para movimento rotacional da barra sobre o seu centro. Da Equação 2 deriva-se que:⁽¹⁾

$$f \cdot a = \frac{1}{2} m a^2 \cdot \alpha$$

Agora:

$$f = \mu_k \cdot N = \mu_k (mg \cdot \cos \gamma + m \Omega^2 \delta)$$

Então:

$$\alpha = \frac{2\mu_k}{a} (g \cdot \cos \gamma + \Omega^2 \delta) \quad \text{Eq. 13}$$

O que resulta a aceleração angular da barra uma vez iniciado o deslizamento.

3.6 Deslizamento

Considerado o deslizamento puro sobre o lifter e (com referência a Figura 2) resolvendo as forças paralelas e perpendiculares para a face do mesmo, tem-se o seguinte:

A aceleração linear é encontrada pela expressão em termos de s e δ :

$$\ddot{s} - \Omega^2 s = g(\mu_k \cdot \cos \gamma - \sin \gamma) + \Omega^2 \mu_s \delta \quad \text{Eq.14}$$

Do ponto de transição é fácil começar com um novo tempo, o qual pode ser designado por τ . As condições de fronteira em $\tau = 0$ são dadas como:

$$s(0) = s_I e \dot{s}_{\tau=0} = \dot{s}_I$$

A solução desta equação diferencial que é consistente com essas condições de fronteiras é:

$$s(\tau) = \left[s_I + \mu_k \delta + \frac{g}{2\Omega^2} (\mu_k \cdot \cos \gamma_I - \sin \gamma_I) \right] \cosh \Omega \tau + \left[\frac{\dot{s}_I}{\Omega} - \frac{g}{2\Omega^2} (\mu_k \cdot \sin \gamma_I + \cos \gamma_I) \right] \sinh \Omega \tau - \frac{g}{2\Omega^2} [\mu_k \cdot \cos(\gamma_I + \Omega \tau) - \sin(\gamma_I + \Omega \tau)] - \mu_k \delta \quad \text{Eq.15}$$

$$\dot{s} = \Omega \left[s_I + \mu_k \delta + \frac{g}{2\Omega^2} (\mu_k \cdot \cos \gamma_I - \sin \gamma_I) \right] \sinh \Omega \tau + \left[\dot{s}_I - \frac{g}{2\Omega} (\mu_k \cdot \sin \gamma_I + \cos \gamma_I) \right] \cosh \Omega \tau - \frac{g}{2\Omega} [-\mu_k \cdot \sin(\gamma_I + \Omega \tau) - \cos(\gamma_I + \Omega \tau)] \quad \text{Eq.16}$$

A Equação 15 é resolvida numericamente para $s(\tau) = s_L$ e encontrando τ obtêm-se a velocidade e posição, γ , para a barra na extremidade do lifter. O τ é iniciado em zero no ponto de transição entre rolamento e deslizamento, então esse tempo de movimento total ao longo do lifter é $t_L = t_I + \tau$.

3.7 Trajetória em Queda Livre

Na extremidade do lifter a barra é imediatamente projetada em queda livre, pois não há um acréscimo significativo na interação com a extremidade do lifter nem no

resultado da velocidade angular. A Figura 4 ilustra claramente a razão porque a barra escapa. Devido a esta ser um corpo rígido, todas suas partes viajam com a mesma velocidade, como o centro da barra, o que causa uma diferença nas velocidades entre o ponto da barra que está em contato com o lifter e a extremidade dela mesma.

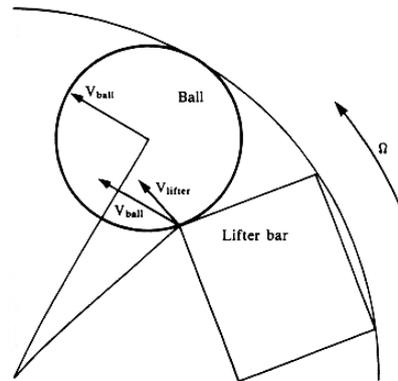


Figura 4. Resolução das velocidades para uma barra repousando na extremidade do lifter.⁽¹⁾

Se o lifter estiver gasto ou arredondado na extremidade, o ponto no qual o arredondamento inicia é efetivamente a extremidade. A curvatura da superfície do lifter resulta em um decréscimo da face do ângulo. Quanto menor a face do ângulo do lifter menor a altura de carregamento da barra. Portanto logo que a barra se movimenta ao longo do lifter e encontra uma face de baixa inclinação ela deve cair em queda livre do ponto de equilíbrio e não se movimentará ao longo do mesmo totalmente.⁽¹⁾

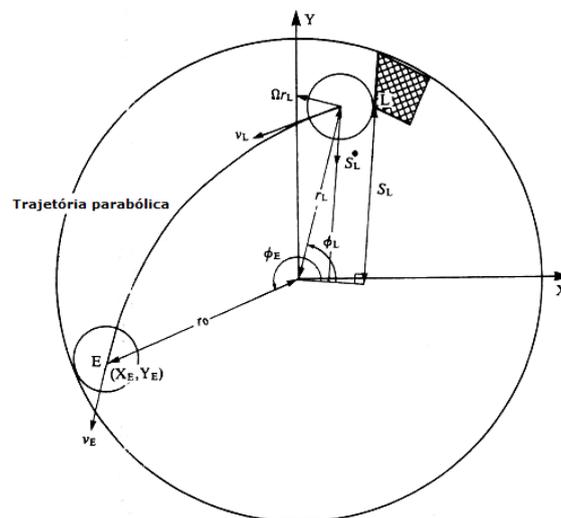


Figura 5. Trajetória parabólica da barra no seu ponto de desprendimento do lifter.⁽¹⁾

A trajetória em queda livre é ilustrada na Figura 5. Na extremidade da barra elevadora as seguintes variáveis são conhecidas: $\dot{s}_L, s_L, \theta_L, \beta_L, \gamma_L$. As coordenadas polares da barra são:

$$(r_L; \phi_L) = \left(\frac{s_L}{\cos \beta_L}; \gamma_L - \beta_L \right) \quad \text{Eq.17}$$

Uma vez em queda livre a barra segue uma trajetória parabólica a qual é dada por:

$$x = x_L + v_{xL}t \quad \text{Eq.18}$$

$$y = y_L + v_{yL}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{Eq.19}$$

O ponto no qual a barra bate na carcaça do moinho, assumindo que não há interação com a carga moedora no caminho, é satisfeito pela condição:

$$x_E^2 + y_E^2 = r_0^2 \quad \text{Eq.20}$$

As componentes da velocidade são dadas por:

$$(v_{xE}; v_{yE}) = (v_{xL}; v_{yL} - gt) \quad \text{Eq.21}$$

Portanto a velocidade de impacto com a carcaça do moinho é:

$$v_E = \sqrt{v_{yE}^2 + v_{xE}^2} \quad \text{Eq.22}$$

O ângulo σ_E com a horizontal:

$$\sigma_E = \arctan\left(\frac{v_{yE}}{v_{xE}}\right)$$

Os cálculos do caminho completo da barra na queda e suas condições de impacto com a carcaça foram obtidos. Com a análise teórica completa do movimento de uma barra isolada em um moinho rotativo com lifter de face plana de qualquer ângulo e altura.

4 CONCLUSÃO

Este estudo complementa o trabalho de Powell⁽¹⁾ contribuindo para que se possa simular a trajetória dos corpos moedores em moinhos de barras. A implementação deste trabalho em uma planilha eletrônica, como o Microsoft Excel[®], indicará aos operadores e responsáveis pela etapa de moagem quais impactos na trajetória das barras, caso alteram o grau de enchimento, diâmetro do corpo moedor, velocidade do moinho e etc. Podendo escolher assim, de forma segura quais decisões devem ser tomadas para melhorar a eficiência da moagem.

REFERÊNCIAS

- 1 POWELL, M.S., The effect of liner design on the motion of the outer grinding elements in a rotary mill. Int. J. Min. Proc., 1991, 31, p.163-93.