



SISTEMA COMPUTACIONAL PARA REGENERAÇÃO DE COORDENADAS GRÁFICAS¹

Adhebar Soares Júnior²
José Aurélio Medeiros da Luz³

Resumo

É comum o engenheiro deparar-se com dados gráficos sem disponibilidade dos correspondentes valores numéricos das coordenadas. Outro caso similar é ter-se imagem de microscópio, sem a disponibilidade de um sistema de tratamento de imagens. Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma ferramenta para capturar dados espaciais em plano cartesiano de dimensões lineares ou logarítmicas. Assim, foi desenvolvido um modelo analítico baseado no cálculo vetorial, que gerou uma aplicação chamada de *coordenadas gráficas*. Após a entrada de informações iniciais relativas aos eixos coordenados (pontos de amarração), tal programa calcula, para cada valor clicado na tela do computador, o seu respectivo valor na imagem estudada. Nos testes foram utilizados vários gráficos com valores previamente conhecidos. O sistema também disponibiliza ferramentas como dimensionamento da figura e uma lupa, que aumenta uma pequena região ao redor do ponteiro do *mouse*. Os dados gerados podem ser salvos num arquivo texto ou impressos. Sob o ponto de vista dos resultados, o sistema mostrou-se ferramenta utilíssima.

Palavras-chave: Coordenadas; Plano cartesiano; Digitalização; Piriforme; Quártica.

SOFTWARE FOR GRAPHICAL COORDINATE RETRIEVING

Abstract

The need for true numerical values of Cartesian coordinates from graphical data or pictures is common in engineering work. Another similar case is to have microscope image, lacking a computational system for image processing. This study aimed to develop a simple tool to retrieve data in the Cartesian space in linear or even logarithmic scale, in order to gather actual coordinates and record them in an indexed x:y file. Thus, an analytical model based on vector calculus was developed, which has supported an application called *coordinate graphic*. After information input on the coordinate axes (anchor points), this program calculates for each dot clicked on the computer screen its respective value in each image. In the tests several charts were used, whose numerical values were known. The system provides tools such as picture sizing and magnifying aid, which increases a small region around the mouse pointer. The generated data can be saved in a text file or printed. The results showed the system is a very useful tool.

Keywords: Coordinate; Cartesian plane; Digital retrieving; Piriform; Quartic equation.

¹ Contribuição técnica ao 65º Congresso Anual da ABM, 26 a 30 de julho de 2010, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

² Graduando em engenharia de minas (Demin; Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP).

³ Doutor em engenharia de minas (Demin; Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP).



1 INTRODUÇÃO

É comum o engenheiro deparar-se com dados gráficos sem disponibilidade dos correspondentes valores numéricos das coordenadas (especialmente em artigos técnicos) ou ter uma imagem de microscópio sem a disponibilidade de sistema de tratamento de imagem. O presente trabalho consistiu em desenvolver um programa computacional extrator de coordenadas gráficas, cujo método permite analisar gráficos logarítmicos, lineares ou simplesmente contar pontos. O presente sistema permite extrair rapidamente informações nesses dois contextos citados.

A partir do uso de apenas um computador, o usuário que utiliza o programa, pelo método de cálculo vetorial, pode, por exemplo, extrair as coordenadas de um gráfico linear ou logarítmico – plotado em uma figura – e informa os seus respectivos valores na imagem.

Também apresenta algumas ferramentas como dimensionamento da figura e uma lupa auxiliar, que aumenta pequena região ao redor do ponteiro do mouse. Os dados gerados podem ser salvos num arquivo texto, ou impressos.

O objetivo do modelo foi relacionar um arquivo de imagem gráfica com a tela do computador. Este método utiliza cálculo vetorial que relaciona os pontos da tela assumindo toda a tela como um primeiro plano gráfico e um segundo plano gráfico que corresponde ao arquivo de imagem. Os tipos gráficos tratáveis por este método são: linear, logarítmicos e dispersão de pontos – o último apenas tem como interesse a contagem ou delineamento dos pontos.

Cumprir registrar, que, embora utilizando outra abordagem de análise gráfica, existem, no mercado, programas similares que digitalizam a imagem e retiram os dados numéricos utilizando o recurso do *scanner*. Citam-se, como exemplo, o GetData, Graph Digitizer e o Leitor.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Amarração de Sistemas Cartesianos de Coordenadas

Seja definido um sistema de coordenadas com uma origem “o” e seus respectivos eixos vertical “oy” e horizontal “ox” do plano cartesiano; e um outro de eixos paralelos ao primeiro, e com origem “O” e eixos vertical “O’Y” e horizontal “O’X”. Conforme indicado na figura 1. Seja M ponto genérico exprimível por ambos os sistemas de coordenadas: $M = (x_m; y_m) = (X_p; Y_p)$.

Considere-se que o plano (xoy) se refere à tela do computador; e o (XO’Y) se refere a um gráfico da figura (imagem). Os raios vetores são definidos como:

$$\Gamma_m = \Theta_m + \rho_m \quad (1)$$

$$\rho_m = aX_0\hat{i} + bY_0\hat{j} \quad (2)$$

$$\Theta_m = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} \quad (3)$$

Naturalmente, se o par ordenado $(x_m; y_m)$ de qualquer ponto M não for conhecido, há a necessidade de pontos de amarração de coordenadas conhecidas, para que, a partir das coordenadas da tela do computador, $(X_p; Y_p)$, se possa calcular o par ordenado desconhecido (criando base, com vetores linearmente independentes).

Sejam os seguintes pontos de amarração previamente conhecidos: $P_o = (X_0, Y_0) = (x_1, y_2)$; $P_y = (X_0, Y_2) = (x_1, y_1)$; e $P_x = (x_2, y_2) = (X_2, Y_0)$.

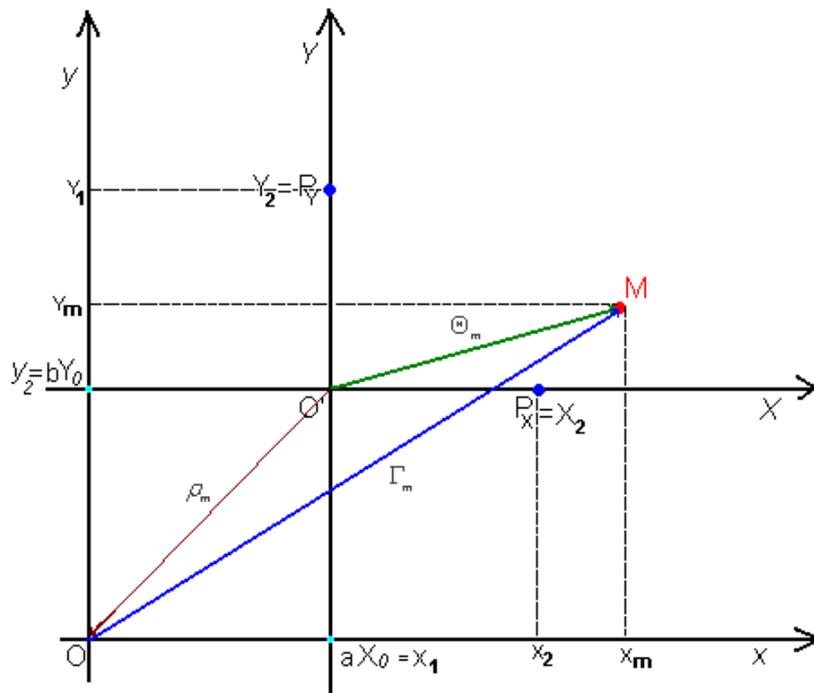


Figura 1. Mudança de sistemas de coordenadas defasados sem rotação e com eixos paralelos.

Ajustando as mudanças de coordenadas para os valores dos pontos, obtêm-se:

$$\Gamma_m = (x - x_0 + aX_0)\hat{i} + (y - y_0 + bY_0)\hat{j} \quad (4)$$

$$x_m - x_0 + aX_0 = aX_p \quad (5)$$

$$y_m - y_0 + bY_0 = aY_p \quad (6)$$

$$x_m = a(X_p - X_0) + x_0 \quad (7)$$

$$y_m = b(Y_p - Y_0) + y_0 \quad (8)$$

Somando dois pontos distintos obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a(X_1 - X_0) + x_0 \\
 [x_2 &= a(X_2 - X_0) + x_0] \times (-1) \\
 \hline
 x_1 - x_2 &= a(X_1 - X_2)
 \end{aligned} \quad (9)$$

E para o eixo y vem:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a(Y_1 - Y_0) + y_0 \\
 [y_2 &= a(Y_2 - Y_0) + y_0] \times (-1) \\
 \hline
 y_1 - y_2 &= a(Y_1 - Y_2)
 \end{aligned} \quad (10)$$

Por simples algebrismo, obtêm-se então fatores de escala para conversão dos eixos, ficando cada um da seguinte forma, quando a escala do gráfico (figura) é linear:

$$a = \frac{x_1 - x_2}{X_1 - X_2} = \frac{x_0 - x_2}{X_0 - X_2} \quad (11)$$

$$b = \frac{y_1 - y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{y_0 - y_1}{Y_0 - Y_1} \quad (12)$$

Para o caso de gráfico logarítmico, as equações dos fatores de escala, devem ser mudados de modo conveniente, resultando:

$$a = \frac{\text{Log}(x_1) - \text{Log}(x_2)}{X_1 - X_2} = \frac{\text{Log}(x_0) - \text{Log}(x_2)}{X_0 - X_2} \quad (13)$$

$$b = \frac{\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_2)}{Y_1 - Y_2} = \frac{\text{Log}(y_0) - \text{Log}(y_2)}{Y_0 - Y_2} \quad (14)$$

Valores correspondentes aos pontos da tela com os respectivos pontos da imagem (amarração dos pontos):

- Gráfico linear

$$X_0 = X_1 - \frac{1}{a}(x_1 - x_0) \quad (15)$$

$$Y_0 = Y_1 - \frac{1}{b}(y_1 - y_0) \quad (16)$$

- Gráfico logarítmico:

$$X_0 = X_1 - \frac{1}{a}(\text{Log}(x_1) - \text{Log}(x_0)) \quad (17)$$

$$Y_0 = Y_1 - \frac{1}{b}(\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_0)) \quad (18)$$

Obtêm-se, Por fim, os valores de X e Y do ponto genérico:

- Gráfico linear:

$$X_m = a \left[X_p - X_1 + \frac{1}{a}(x_1 - x_0) \right] + x_0 \quad (19)$$

$$Y_m = b \left[Y_p - Y_1 + \frac{1}{b}(y_1 - y_0) \right] + y_0 \quad (20)$$

- Gráfico logarítmico:

$$X_m = a \left[X_p - X_1 + \frac{1}{a}(\text{Log}(x_1) - \text{Log}(x_0)) \right] + \text{Log}(x_0) \quad (21)$$

$$Y_m = b \left[Y_p - Y_1 + \frac{1}{b}(\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_0)) \right] + \text{Log}(y_0) \quad (22)$$



Simplificando, tem-se:

- Gráfico linear:

$$X_m = a[X_p - X_1] + x_1 \quad (23)$$

- Gráfico Logarítmico:

$$Y_m = b[Y_p - Y_1] + y_2 \quad (24)$$

$$X_m = a[X_p - X_1] + \text{Log}(x_1) \quad (25)$$

$$Y_m = b[Y_p - Y_1] + \text{Log}(y_2) \quad (26)$$

Os valores de X e Y reais (isto é: verdadeiros) do ponto M, no caso de gráfico no caso linear e no caso de gráfico logarítmico (na base 10) ficam, respectivamente, no caso linear: $X_{real} = X_m$ e $Y_{real} = Y_m$; e no caso de escala logarítmica:

$$X_{real} = 10^{X_m} \text{ e } Y_{real} = 10^{Y_m}.$$

Nas equações precedentes, os significados das variáveis são descritos a seguir:
a e b: índices ou fatores de escala entre o gráfico e a tela do computador;

X_p e Y_p : pontos da tela;

X_i e Y_i : pontos relativos aos eixos coordenados da tela do computador;

X_{real} : valor do ponto X calculado;

Y_{real} : Valor do ponto Y calculado;

x_1 e x_0 : pontos do eixo x do gráfico informados pelo usuário (ponto de amarração);

y_1 e y_0 : pontos do eixo y do gráfico informados pelo usuário (ponto de amarração).

2.2 Desenvolvimento do Sistema em Delphi

Um sistema que permite a obtenção de coordenadas cartesianas de pontos do plano euclidiano, conforme formulado no item anterior foi desenvolvido. O sistema se baseia na leitura de uma imagem em formato gráfico (como as com extensão BMP ou JPEG). Para adaptar este método da tela do computador, o sentido do eixo y teve que ser mudado, pois o sentido das ordenadas na tela do computador é de cima para baixo.

A leitura, dita captura primária das coordenadas aparentes, é feita clicando-se em cada píxel dos pontos de interesse na tela do computador, coletando-se as coordenadas atuais dos pontos na tela. Essa captura primária das coordenadas é feita de modo dinâmico, podendo-se a qualquer tempo aplicar-se uma lupa ("zoom"), ou arraste e translação, via barras de rolagem vertical ou horizontal, ou, mesmo, por movimentação equivalente de controle de mouse ou cursor de arraste. Esse aspecto dinâmico é conseguido por amarração das coordenadas aparentes às coordenadas fixas de um ponto de origem: $P_0=(x_0,y_0)$. Essa origem é obtível de uma base de coordenadas linearmente independentes previamente conhecidas ou de leitura trivial (em caso de gráficos). O sistema foi implementado em linguagem computacional Delphi.⁽¹⁻³⁾ Ele gera um arquivo de pares cartesianos, os quais podem ser plotados sob forma de gráficos.



2.3 Validação do Sistema

A validação foi feita submetendo o sistema computacional a vários testes. Nos testes, foram utilizados vários gráficos com as coordenadas de seus pontos previamente conhecidos. O objetivo principal do sistema foi digitalizar dados espaciais em plano cartesiano, capturando as coordenadas gráficas e as gravando em arquivo indexado de pares ordenados $(x(i),y(i))$. Entretanto ele pode ser utilizado para fazer tratamento de imagem, calculando as coordenadas de contornos e fazendo estatística descritiva das feições analisadas. Assim, Além de regeneração de coordenadas gráficas o sistema também foi testado no levantamento de contornos de feições gráficas, como grãos ou gota pendente de capilar.

Para esse caso, o programa computacional de análise estatística de dados gráficos utilizado foi o *EasyPlot for Windows*, versão 4.0.4. O principal aspecto da paleta de ajuste estatístico de curvas do programa utilizado é que a essa ferramenta possibilita a adoção arbitrária do tipo de curva. O operador pode especificar a natureza de curva de ajuste, a partir de uma análise matemática da nuvem de dados, em especial com a introdução de argumentação heurística, baseada no conhecimento do sistema real.⁽⁴⁾

3 RESULTADOS

Como exemplos de aplicação foram utilizados vários gráficos com valores previamente conhecidos e muitos outros de valores desconhecidos (escaneados). Dois exemplos são mostrados a seguir:

3.1 Exemplo 1: Estimativa de Erros na Regeneração de Dados de Gráfico Linear

A Figura 2 ilustra um gráfico gerando no Microsoft Excel, referente a uma curva granulométrica.⁽⁵⁾

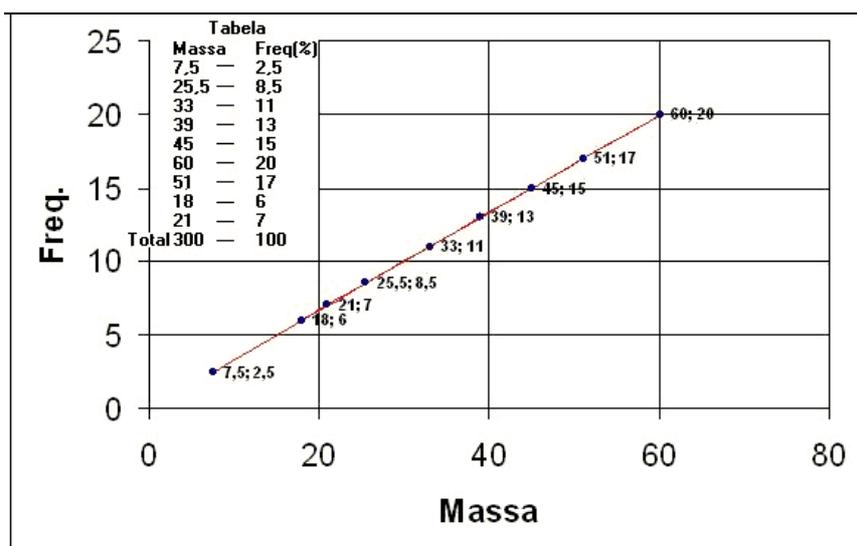


Figura 2. Exemplo de gráfico escaneado, com coordenadas previamente conhecidas.⁽²⁾

Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 1, a seguir.



Tabela 1. Dados do gráfico regenerados

Registro	x (tela)	y (tela)	Xreal (regenerada)	Yreal (regenerada)
1	142	450	7,46	2,50
2	202	485	17,87	6,00
3	218	496	20,65	7,10
4	245	511	25,34	8,60
5	288	535	32,80	11,0
6	323	556	38,87	13,10
7	357	576	44,77	15,10
8	392	595	50,85	17,00
9	445	625	60,04	20,00

Os valores com muitas casas decimais correspondem a precisão exigida pelo programa, e comparando os valores obtidos com os listados na figura, podem-se calcular os erros relativos incorridos pelo processo manual de clicar nos pontos durante uma instância do programa (após amarração de três pontos linearmente independentes, origem, um ponto no eixo dos Y e outro no dos X) (Tabela 2).

Tabela 2. Dados originais do exemplo e erros associados à regeneração⁽⁵⁾

Registro	Xreal = massa [g]	Yreal= retido simples [%]	Erro em x	Erro em y
1	7,5	2,5	0,51%	0,00%
2	18,0	6,0	0,70%	0,00%
3	21,0	7,0	1,66%	-1,43%
4	25,5	8,5	0,64%	-1,18%
5	33,0	11,0	0,61%	0,00%
6	39,0	13,0	0,33%	-0,77%
7	45,0	15,0	0,51%	-0,67%
8	51,0	17,0	0,30%	0,00%
9	60,0	20,0	-0,07%	0,00%
Totais	300,0	100	-	-

3.2 Exemplo 2: Obtenção do Perfil de Gota Pendente

Tate, em 1864, desenvolveu um método simples de cálculo de tensão superficial de líquido pesando gotas que se destacavam lentamente da extremidade de um tubo capilar de raio conhecido e de eixo vertical.⁽⁶⁾ Usualmente emprega-se um estalagmômetro para tais ensaios. Um aparato simplificado, como mostrado na Figura 3-a, pode, contudo, ser usado para líquidos de baixa volatilidade.

A equação de Tate modificada é obtida igualando-se o peso da gota no instante de se desprender do capilar à força superficial de adesão; ela é dada por:

$$Peso = P = m \times g = 2 \times \pi \times d \times \gamma \times \cos(\theta) \times F \quad (27)$$

Onde γ é a tensão superficial (em N/m, equivalente a J/m²) e θ é o ângulo de contacto. Tendo-se o peso médio da gota no destacamento, o diâmetro do capilar (para capilar molhável pelo líquido é o diâmetro externo) e o ângulo de repouso pode-se calcular a tensão superficial, desde que o fator de correção morfológico, F , seja conhecido. F geralmente é tabelado e é função da razão entre o diâmetro e a raiz cúbica do volume da gota (tabelas como a de Harkins e Brown⁽⁷⁾).



Tate adotava $F = 1$, ou seja: o fator de correção foi introduzido depois, por outros pesquisadores, pois a morfologia da gota não era esférica (e sim píncica ou aproximadamente piriforme⁽⁸⁾). Além disso, ele usualmente incorpora efeitos menores como efeitos inerciais devido fluido com quantidade de movimento (e, portanto, energia cinética), à medida que a gota cresce de volume antes de se destacar do capilar.

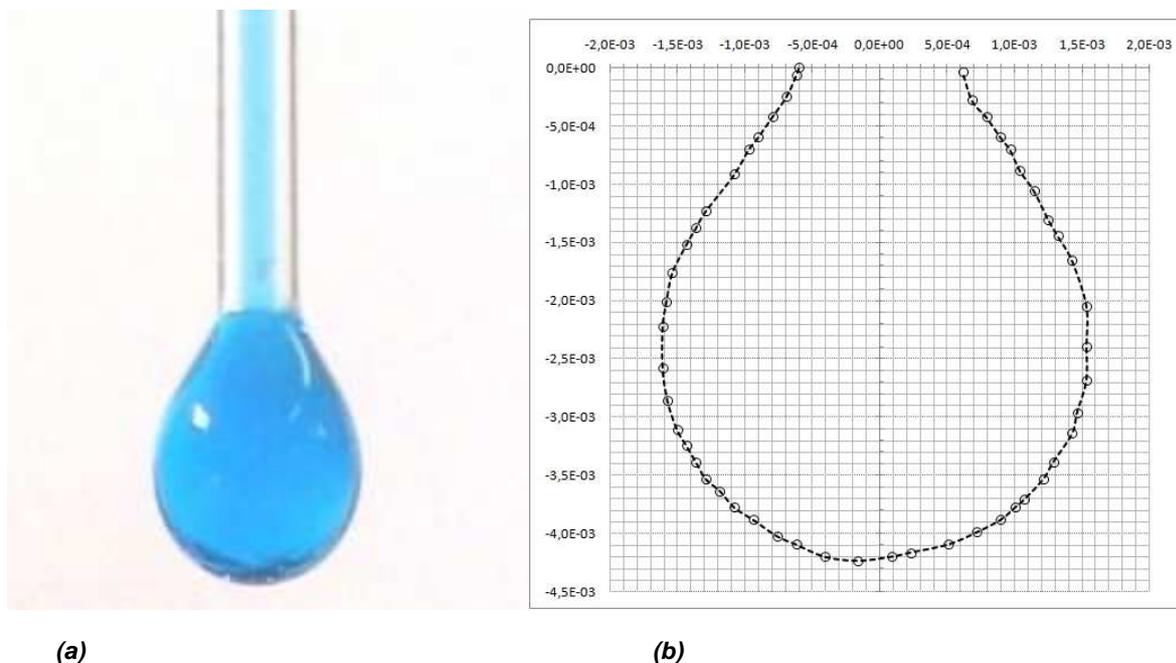


Figura 3. Perfil de gota cadente em capilar de diâmetro externo de 1,2 mm (água com corante alimentício azul, para facilidade de visualização). (a) – Foto com máquina digital; (b) – reconstituição do perfil usando o sistema de regeneração de coordenadas gráficas (valores nos eixos expressos em metro). A diferença morfológica virtual entre a gota real e seu perfil reconstituído é decorrente de pequena diferença nas escalas dos eixos.

Sabendo-se que a massa específica é a razão entre massa e volume (dada em kg/m^3), tendo-se a massa específica e o volume o cálculo do peso é trivial. Entretanto, o cálculo de volume de gota é complexo. Por isso, para exemplificar o uso do sistema em tela, a morfologia de gota fotografada (figura anterior) foi levantada e suas coordenadas utilizadas para aderência, por regressão não linear, de curvas facilmente integráveis.

Primeiramente gerou-se arquivo texto de pares ordenados do contorno da gota. Como essa é uma superfície de revolução tendo como eixo de simetria azimutal o eixo vertical (figura 3-b), aplicou-se uma reflexão especular de metade da gota, de modo a melhorar a precisão da estimativa do perfil. Para aumentar a generalidade da curva a ser obtida por regressão não linear, optou-se por se normalizar os valores, adotando coordenadas adimensionais (por sua divisão pelo diâmetro externo do capilar), resultando os pontos plotados na Figura 4, adiante.

Regressão polinomial (empregando-se o *EasyPlot*) somente deu bom resultado com grau 9. O polinômio de regressão do semiperfil transposto, em coordenadas adimensionais (X^* ; Y^*), foi:

$$Y^* = -0,0124 \times X^{*9} + 0,197 \times X^{*8} - 1,32 \times X^{*7} + 4,79 \times X^{*6} - 10,3 \times X^{*5} + 13,1 \times X^{*4} - 9,77 \times X^{*3} + 4,00 \times X^{*2} - 0,202 X^* + 0,509 \quad (28)$$

O polinômio tem desvio máximo de 0,139 e coeficiente de correlação: $R^2 = 0,985$. Entretanto, em face da similitude de formato, tentou-se a regressão empregando-se a equação quártica ou piriforme. Essa curva plana, convencionalmente com vértice na origem e eixo das abscissas como o de simetria azimutal, é dada pela equação⁽⁸⁾:

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \times x^3 \times (2 \times a - x)} \quad (29)$$

O centróide da piriforme na direção x é dado por $x_c = (2/3) \times a$.

Entretanto, como, no caso atual, na origem tem-se ainda um pescoço com a dimensão do diâmetro externo do capilar testou-se uma equação de piriforme generalizada (por vezes chamada de família de curvas lacrimais) com adição suplementar de termo aditivo progressivamente amortecido, dado pela equação:

$$y = \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \times (X^*)^n \times (2 \times a - X^*)} \right) - \frac{1}{2} \times e^{-6,2 \times X^*} \quad (30)$$

Os valores regressionais dos parâmetros (empregando-se o *EasyPlot*) foram: $a = 1,1765$; $b = 2,061$; $n = 1,343$ (onde n corresponde ao expoente na equação anterior); o desvio máximo foi de 0,803 e o coeficiente de correlação: $R^2 = 0,976$.

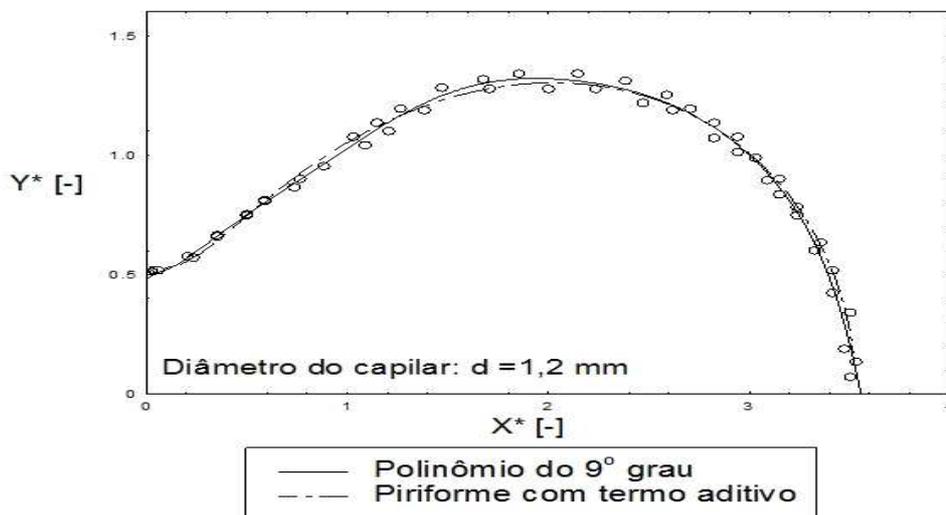


Figura 4. Semiperfil da gota da figura anterior (coordenadas normalizadas adimensionais, com $X^* = X/d$ e $Y^* = Y/d$).

4 DISCUSSÃO

Os valores obtidos pelo programa mostraram-se bem próximos dos valores reais informados na tabela descrita no próprio gráfico. Com exceção dos registros 3 e 4, os erros todos ficaram abaixo de 1 %. A linha de totalização não constitui um dados

fornecido pelo programa, sendo que os erros podem ser minimizados com a precisão do usuário e a resolução da tela do computador para o caso de gráficos com escalas muito grandes. Obtiveram-se bons resultados trabalhando com as imagens no seu tamanho original, sem serem expandidas.

Foram realizados vários outros testes com diferentes tipos de arquivos gráficos, que não estão mencionados neste artigo. Os erros obtidos também seguiram o mesmo formato do exemplo exposto. O programa, em seu estágio atual, possui algumas limitações com relação a não trabalhar com sistemas cartesianos de eixos não ortogonais, ou com aqueles em que os eixos não estejam alinhados com as arestas da tela do computador, embora para pequenos erros de alinhamento o sistema faça correções, desde que decididas pelo usuário.

O uso da equação do tipo quártica ou piriforme⁽⁸⁾ tem a desvantagem de convergir para espessura zero no vértice da gota, falseando o volume de uma gota real na extremidade de capilar com dimensão não nula. Assim, vê-se que a modificação feita na equação (inserção de termo aditivo com amortecimento exponencial) levou a maior aderência estatística entre a curva teórica e a nuvem experimental.

De posse da expressão do semiperfil da gota, o volume pode ser facilmente calculável, por integração algébrica, a partir do teorema de Pappus-Guldin.

A título de registro, pode-se, no caso sob estudo, proceder à análise morfológica com modelagem geométrica tridimensional, utilizando-se recursos bastante modestos, conforme metodologia que pode ser vista em Silva e Oliveira.⁽⁹⁾

5 CONCLUSÃO

Sob o ponto de vista dos resultados, o sistema mostra-se ferramenta utilíssima na área acadêmica quando aplicado na análise de gráficos produzidos em artigos, livros, revistas, e jornais. Outra utilização é na contagem de pontos, como, por exemplo, uma foto de amostra de fragmentos de um mineral, estando disponíveis ferramentas usuais, como: perímetro, medida automática de ângulos, elaboração de histogramas e parâmetros estatísticos usuais, por exemplo: desvio padrão, média, mínimo, máximo.

No cotidiano, o método se aplica a alguns exemplos, como os de variação de ações em bolsas de valores, em usos comerciais, como: gráficos impressos em jornais, medidas de desempenho de produção e gráficos utilizados na física.

Na área acadêmica, a extração dos pontos para uma futura interpolação é interessante, uma vez que o programa salva em um arquivo texto os pontos selecionados. Sendo assim, a ferramenta se torna útil quando apresenta resultados estatísticos e cálculos vetoriais.

A morfologia da gota estudada neste trabalho, a título de aplicação do sistema computacional mostrou-se tratável algebricamente. A quártica ou piriforme clássica não apresentou bons resultados, nem mesmo com mudança de coordenadas para configurar uma translação (e deixar o vértice “truncado” com a dimensão do diâmetro efetivo do capilar, em vez de *vértice no ponto*).

Por outro lado, a nova equação obtida acena para métodos automatizados de cálculo de tensão superficial sem necessidade de equipamentos sofisticados, devendo, portanto, ser objeto de estudos ulteriores.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia de Minas (Demin/EM/Ufop), pelo suporte fornecido, bem como ao CNPq pela bolsa de produtividade em pesquisa do segundo autor.

REFERÊNCIAS

- 1 BORLAND. *Delphi 3 Standart - Borland Software Corporation* (www.borland.com), (Arquivo ajuda e guias); Acesso em: 25 set. 2009.
- 2 CANTÚ, Marco - *Dominado o Delphi 2 "A bíblia"*:Ed. Makron Books. 1996
- 3 GAJIC, Zarko – gZoom in [web:www.about.com](http://www.about.com) - *Guide to Delphi Programming*. Disponível em: <http://delphi.about.com/library/weekly/aa120198.htm>. Acesso em: 25 set. 2009.
- 4 LUZ, J. A. M. da. Conversibilidade entre distribuições probabilísticas usadas em modelos de hidrociclones. *REM: Revista Escola de Minas*, Ouro Preto, 58(1): 89-93, jan. mar. 2005.
- 5 SAMPAIO, João Alves & NOGUEIRA, Fernanda Arruda. Análise granulométrica por peneiramento. In: SAMPAIO, J. A. *et alii* (Ed.). *Tratamento de Minérios Práticas Laboratoriais* (1. ed.). Rio de Janeiro: CETEM, 2007. v. 1. Parte II, cap. 3, p.55-72.
- 6 LUZ, J. A. M. da & LIMA, R. M. F. Medida de Tensão Superficial. In: SAMPAIO, J. A. *et alii* (Ed.). *Tratamento de Minérios Práticas Laboratoriais* (1. ed.). Rio de Janeiro: CETEM, 2007. v. 1. Parte II, cap. 23, p. 471-488.
- 7 BECHER, Paul. *Emulsiones – Teoria y Práctica*. Madrid: Editorial Blume, 1972. 398 p.
- 8 WEISSTEIN, Eric W. *Piriform – from MathWorld – a Wolfram Web Resource*. Disponível em < <http://mathworld.wolfram.com/Piriform.html>> Acesso em: 26 fev. 2010.
- 9 SILVA, Aniele Domingas Pimentel & OLIVEIRA, Claudir. *Uso de Ferramentas Computacionais para Construção e Análise de Superfícies de Revolução*. Santarém: Faculdade de Matemática/Ufpa. Maio de 2008. 8 p.