

ESTUDO DO GRADIENTE DE TENSÃO GERADO EM FADIGA POR FRETTING ¹

*Luciana Sgarbi Rossino²
Marcos Dorigão Manfrinato²
Luiz Homero Martins Lopes³
José Alexander Araújo⁴
Waldek Wladimir Bose Filho⁵*

Resumo

O processo conhecido como fadiga por fretting ocorre em juntas mecânicas pressionadas por uma carga estática, em que vibrações de pequena amplitude ou tensões cíclicas às quais os componentes podem estar sujeitos provocam micro-eskorregamento entre as superfícies ao longo das zonas de contato, e está relacionado à ocorrência simultânea de desgaste, corrosão e dano por fadiga. Neste trabalho, foi obtido e analisado o campo de tensão cíclico sub-superficial gerado pelo contato plano-cilindro em regime de deslizamento parcial. Este corresponde a um passo fundamental para determinar a influência destes gradientes na resistência em fadiga de componentes sujeitos ao fretting.

Palavras-chave: Fadiga por fretting; Gradiente de tensão; Iniciação de trincas

STRESS GRADIENT STUDY GENERATED IN FRETTING FATIGUE

Abstract

The process known fretting fatigue occur in mechanical joints pressed by a static load, in that vibrations of small amplitude or cyclical stress to which the components can be subject promote micro slip among the surfaces along the contact areas and it is related to the simultaneous occurrence of wear, corrosion and fatigue damage. In this work, it was obtained and analyzed the sub-superficial cyclical stress field generated by the high stress concentration in the area of contact presents in problems of fretting fatigue, for plan-cylinder contact in regime of partial sliding. This corresponds to a fundamental step to determine the influence of these gradients in the fatigue strength of components subject to the fretting.

Key words: Fretting fatigue; Stress gradient; Crack initiation

¹ *Contribuição técnica ao 62º Congresso Anual da ABM – Internacional, 23 a 27 de julho de 2007, Vitória – ES, Brasil.*

² *Mestre em Engenharia e Ciência dos Materiais, EESC, Universidade de São Paulo, Brasil*

³ *Graduando em Engenharia Mecânica ENM, Universidade de Brasília, Brasil*

⁴ *Prof. Doutor do Departamento de Engenharia Mecânica, ENM, Universidade de Brasília, Brasil*

⁵ *Prof. Tit. Doutor de Engenharia e Ciência dos Materiais, EESC, Universidade de São Paulo, Brasil*

1 INTRODUÇÃO

A fadiga por *fretting* é um tipo particular de fadiga de materiais que vem recebendo muita atenção de engenheiros e pesquisadores, devido ao crescente número de falhas de componentes em serviço que tem sido atribuído a este fenômeno. Duas conseqüências podem advir deste fenômeno: (1) o desgaste por *fretting* - quando os micro-escorregamentos relativos provocam um desgaste superficial; (2) a fadiga por *fretting* - quando os micro-escorregamentos relativos, associados a concentração de tensão causada pelo contato mecânico, aceleram os processos de nucleação e de crescimento de trincas nos componentes de montagem sujeitos a uma tensão remota cíclica ao contato, levando o sistema prematuramente ao colapso. Testes experimentais tem mostrado que a ocorrência da fadiga por *fretting* pode produzir redução de até 90% na resistência à fadiga de um material metálico.⁽¹⁾ Segundo Thomson,⁽²⁾ a fadiga por *fretting* causa cerca de 17% das falhas ou contratempos nos sistemas de propulsão aeronáuticos, aumentando a freqüência de intervalos de manutenção e o custo associado com a troca de peças. Alguns exemplos de componentes estruturais que apresentam falhas devido à fadiga por *fretting* podem ser observados em engrenagens, flanges e juntas parafusadas em tubulações de plantas químicas ou refinarias, fuselagem de aeronaves, conexões entre rotor e pá de turbinas ou compressores, cabos de transmissão de energia e dispositivos de bio-implantes.⁽³⁻⁵⁾

Um dos fatores que podem contribuir para a degradação dos componentes em presença da fadiga por *fretting*, e iniciação prematura de trincas de fadiga, é a alta concentração de tensão, causada principalmente pela força de atrito devido ao contato e movimento entre as duas superfícies, produzindo um estado de tensão multiaxial e não proporcional, que decai rapidamente a medida que afasta-se da superfície de contato. Assim, o campo de tensão produzido em problemas de contato envolvendo a presença de *fretting* é considerado a força motriz para a iniciação e propagação precoce de trincas, sendo de extrema importância portanto a quantificação e visualização dos campos de tensão causados por este fenômeno.⁽⁶⁻⁸⁾

Neste contexto, é importante que estudos sejam realizados no sentido do desenvolvimento de ferramentas ou modelos que possam prever mais precisamente a resistência em fadiga por *fretting* de componentes mecânicos. O desenvolvimento de tais modelos pode ser conduzido, geralmente, considerando-se o uso de configurações simples de contato, em que as variáveis envolvidas no fenômeno de fadiga (como tensão e deformação) possam ser mais facilmente obtidas, e a validade dos testes proporcione uma redução no custo de manutenção e substituição de peças.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é quantificar o campo de tensão gerado em testes laboratoriais de fadiga por *fretting*, e analisar o efeito de alguns parâmetros deste processo na nucleação e propagação de trincas em fadiga por *fretting*.

2 CONTATO ENTRE CILINDROS

2.1 Tensões Superficiais

Para se obter o campo de tensão sub-superficial, é apropriado examinar a origem e distribuição das tensões cisalhantes superficiais, a distribuição da pressão no contato e a influência destas tensões entre si. Suponha dois corpos

elasticamente similares em contato normal, como ilustra a Figura 1, em que uma pressão de contato é desenvolvida entre as duas superfícies em contato. Devido a similaridade elástica dos dois corpos, não há escorregamento relativo entre as duas superfícies devido a influência da carga normal. Porém, se uma força tangencial capaz de causar escorregamento for aplicada, surge então uma tensão cisalhante na região de contato, limitada pelo coeficiente de fricção, f .

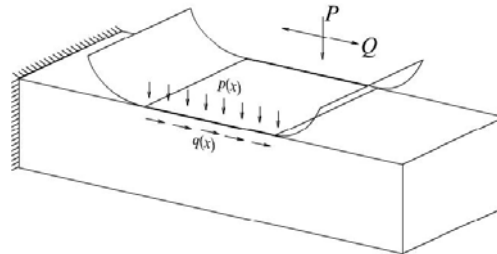


Figura 1: Distribuição $q(x)$ e $p(x)$ na superfície de contato

Assim, considerando-se um plano semi-infinito, submetido a uma distribuição linear de forças com carga normal P , e carga cisalhante Q , por unidade de comprimento, obtém-se a distribuição de pressão, $p(x)$, com relação ao deslocamento normal, $h(x)$, e a tensão superficial cisalhante, $q(x)$, com relação ao deslocamento tangencial relativo, $g(x)$:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} \quad (1)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\zeta) d\zeta}{x - \zeta} \quad (2)$$

onde A é a flexibilidade composta que é definida como:

$$A = 2 \left(\frac{\kappa + 1}{4\mu} \right) \quad (3)$$

sendo $\kappa = 3 - 4\nu$ no estado plano de deformação, ν é a razão de Poisson e μ é o módulo de rigidez.

Assim, obtém-se:

$$\frac{p(x)}{p_0} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (4)$$

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a L} \quad (5)$$

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}} \quad (6)$$

a é o tamanho da metade do comprimento da região do contato, L a largura do contato, p_0 corresponde à pressão máxima, e R e E^* são definidas pelas relações:

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (7)$$

e

$$E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (8)$$

em que os subscritos 1 e 2 referem-se aos corpos 1 e 2 em contato, e E é o Módulo de Elasticidade.

Para qualquer ponto dentro da zona de escorregamento, as tensões superficiais são relacionadas pela conhecida lei de Amontons (9), em que a direção das tensões cisalhantes é oposta ao movimento da superfície, fornecendo:

$$|q(x)| = -fp(x) \quad (9)$$

$$\text{sgn}(q(x)) = -\text{sgn}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \quad (10)$$

onde $\frac{\partial g}{\partial t}$ é a taxa de deslocamento na direção x .

Para o caso em que ocorre escorregamento por toda a região de contato, a equação (9) se aplica, sendo desenvolvido um regime de escorregamento total. Porém, nos casos de fretting, a força cisalhante desenvolvida é menor que o limite para escorregamento total, caracterizada pela equação (11). Neste caso, desenvolvem-se duas regiões distintas dentro da zona de contato: (i) uma região central ($|x| < c$) denominada zona de aderência, onde não há movimento relativo entre pontos correspondentes das superfícies em contato, e (ii) uma região periférica situada entre as extremidades do contato e da zona de adesão ($c \leq |x| \leq a$). Esta região é usualmente denominada de zona de escorregamento (Figura 2).

$$|q(x)| < f^* p(x) \quad (11)$$

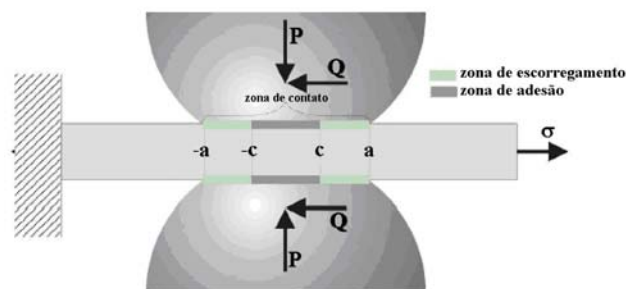


Figura 2: Regiões de escorregamento e de adesão para o contato entre cilindros em regime de escorregamento parcial.

Portanto, parece conveniente modelar as tensões superficiais cisalhantes como uma perturbação da solução de escorregamento total:

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - q'(x) \quad (12)$$

Na zona de adesão, pode-se obter $q'(x)$ resolvendo-se a equação integral (B) e levando em consideração o fato de que não há movimento relativo na direção x entre pontos correspondentes da região de adesão ($g(x) = 0, \forall x \in |x| \leq c$). Portanto:

$$q'(x) = fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad |x| < c \quad (13)$$

Na zona de escorregamento ($c \leq |x| \leq a$) não há perturbação na solução completa, assim:

$$q'(x) = 0 \quad \forall x \in c \leq |x| \leq a \quad (14)$$

O tamanho da zona de adesão, c , é encontrada considerando-se equilíbrio tangencial.

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{fP}\right)} \quad (15)$$

As expressões desenvolvidas, para a distribuição da tensão cisalhante na superfície do contato, são aplicáveis somente quando a força tangencial atinge seu valor máximo no ciclo de carregamento.

Se uma carga remota de fadiga $B(t)$, moderada, é aplicada em fase com a carga tangencial, um deslocamento da zona de adesão, e (nos pontos máximo e mínimo de B) será produzido. A expressão que quantifica esse deslocamento da zona de adesão, é dada pela equação (16). Os detalhes relativos à sua obtenção não serão apresentados, mas o seu desenvolvimento pode ser encontrado em Hills *et al.*⁽¹⁰⁾

$$\frac{e}{a} = \frac{\sigma_{\max}}{4fP} \quad (16)$$

onde σ_{\max} é o máximo valor da tensão remota de fadiga $\sigma_B(t)$ induzida pela carga $B(t)$.

2.2 Campo de Tensão Cíclico no Interior da Região de Contato

O campo de tensão sub-superficial resultante pode ser obtido pela superposição dos campos tensões provocados por $p(x)$ e $q(x)$, embora a variação originada pelo termo de perturbação, $q'(x)$, terá que ser levado em conta. A

componente de σ_{xx}/p_0 para os estágios será, na carga máxima e mínima, para a tensão cíclica gerada em xx:

$$\frac{\sigma_{xx}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_o} = \left(\frac{\sigma_{xx}^N\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_o} \right) \pm f \left(\frac{\sigma_{xx}^T\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_o} \right) \mp f \frac{c}{a} \left(\frac{\sigma_{xx}^T\left(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c}\right)}{fp_o} \right) + \frac{\sigma_B(t)}{p_o} \quad (17)$$

onde o sobrescrito N e T referem-se aos tensores de tensão produzidos pelos carregamentos normal e tangencial, respectivamente.

Estes tensores podem ser avaliados usando-se os potenciais de Muskhelishvili^(10,11) e considerando um estado plano de deformação.

3. ESCOLHA DA CONFIGURAÇÃO EM ANÁLISE

Para a caracterização do campo de tensão gerado, foi utilizado o programa MatLab 7[®]. A escolha da configuração em análise foi motivada pelo desenvolvimento da bancada experimental para ensaios de fadiga sob condições de *fretting* que está sendo montada pelas equipes da UnB e USP. A descrição esquemática dessa bancada é mostrada na Figura 3 e seu princípio de funcionamento será brevemente descrito.

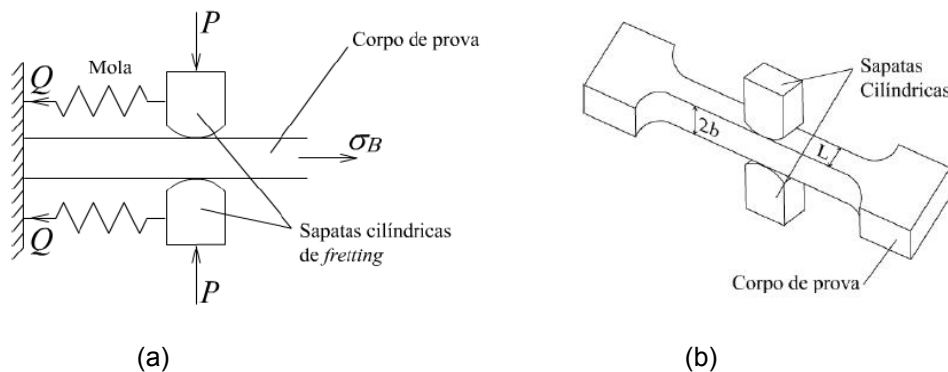


Figura 3: Desenho esquemático (a) configurações experimentais adotadas na análise do trabalho (b) geometria do corpo de prova utilizado em ensaios de fadiga por fretting

No aparato utilizado, a carga P aplicada à sapata é constante, enquanto a carga remota é senoidal alternada. A carga tangencial Q é induzida pela mola, que é distendida e comprimida de acordo com a deformação do corpo de prova (provocada pela carga remota) e com o atrito entre o corpo de prova e a sapata. Desta forma, devido ao aparato experimental, a carga Q será senoidal alternada com mesma frequência e fase que a carga remota. Para este estudo, será considerado o campo de tensão para $Q = Q_{max}$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Distribuição das Tensão Devido as Cargas Normais e Cisalhantes

As Figuras 4(a) e 4(b) ilustram, respectivamente, o perfil da distribuição de pressão e tensões cisalhantes superficiais para uma configuração típica de carregamento. Observa-se que, para a distribuição de $p(x)$ na região de contato,

este encontra seu valor máximo na região central da aplicação de P , denominada pressão de pico p_0 , e se torna nulo na região final do contato. Este perfil de distribuição é válido tanto para escorregamento total como para escorregamento parcial, tendo em vista que, o que difere o escorregamento parcial de escorregamento total é a distribuição da tensão cisalhante na superfície de contato, e esta não interfere na distribuição da pressão durante escorregamento entre os dois corpos.

Já para a distribuição de $q(x)$, observa-se que existe uma diferença considerável na distribuição da tensão cisalhante superficial para escorregamento total em relação a escorregamento parcial. Quando $Q=f*P$, escorregamento ocorre por toda a extensão do contato. Quando Q se torna menor que $f*P$, escorregamento parcial começa a acontecer, observando-se uma diminuição em $q(x)$ na região de adesão, sendo máxima na região que margeia a região de adesão com a região de escorregamento. Quanto menor for a razão entre Q e $f*P$, maior será a zona de adesão, e menor será o valor de $q(x)$ na região de contato.

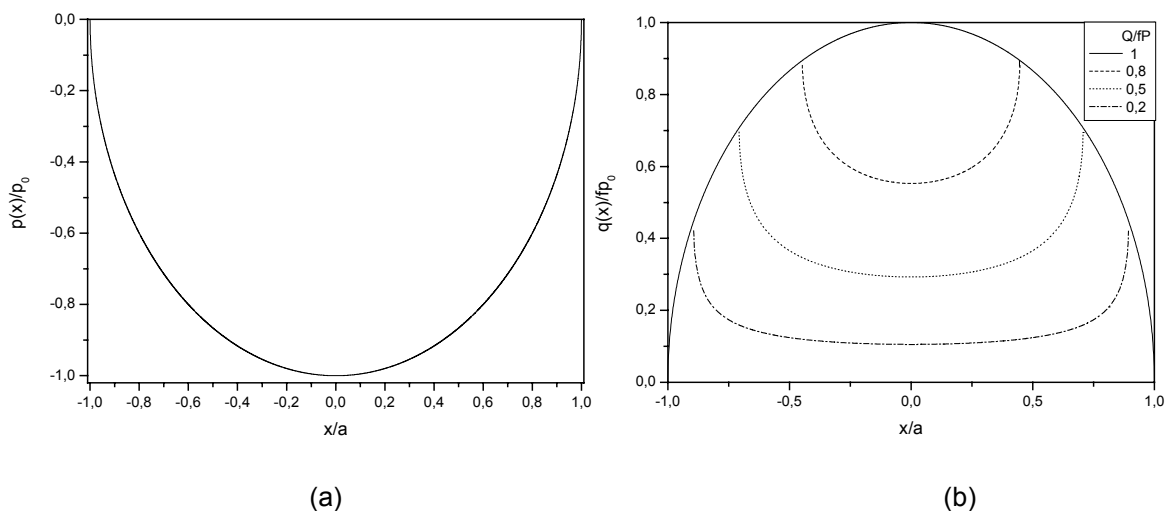


Figura 4: Distribuição, na região de contato (a) de $p(x)/p_0$, e (b) de $q(x)/f p_0$.

Então, para o caso de escorregamento total, na região central de contato entre os dois corpos, $p(x)$ e $q(x)$ alcançam valores máximos. Já para escorregamento parcial, a análise numérica evidencia que a tensão de cisalhamento na margem da região de escorregamento/assentamento é duas vezes maior que o valor médio, sendo um local propício para a iniciação de trincas de fadiga.⁽¹³⁾

4.2 Campo de Tensão Cíclico

A aplicação de metodologias para a determinação da resistência em fadiga por fretting de componentes mecânicos requer a determinação do campo de tensão cíclico na região de contato, considerado o fator governante no processo de iniciação e de propagação precoce de trincas de fadiga. Assim, é de grande importância mapear esse campo de tensão e entender o papel das cargas de contato e da tensão cíclica de fadiga (σ_B), para configurações de contato mais simples que apresentam solução analítica.

De acordo com Waterhouse,⁽¹⁴⁾ as trincas de fretting podem-se iniciar na margem de contato (principalmente em casos de raios de contato agudos e carregamentos normais altos), na interface das regiões de adesão/deslizamento (especialmente nos casos de cargas normais baixas), ou em toda a região de

deslizamento. A iniciação precoce de trincas em fadiga por fretting ocorre devido ao alto, e localizado, gradiente de tensão gerada na região de contato, devido às condições superficiais severas causadas pelas cargas de contato.

As trincas observadas na região de adesão/deslizamento, causadas provavelmente pelo alto valor de tensão cisalhante neste ponto, segundo Szolwinski e Farris,⁽¹⁵⁾ não se propagaram, mantendo-se paradas após um certo tamanho alcançado. Yoshiharu Mutoh⁽¹³⁾ analisou, em um extenso estudo sobre os mecanismos gerados em fadiga por *fretting* e sua influência na resistência dos materiais, que as trincas responsáveis pela fratura dos materiais foram nucleadas nas margens de contato, o que está de acordo com os resultados encontrados por Szolwinski e Farris⁽¹⁵⁾ e Proudhon *et al.*⁽¹⁶⁾ A explicação para este fato pode estar no alto valor da tensão σ_{xx} na margem de contato ($x/a = -1$). Na região de contato, o componente de tensão σ_{xx} atinge seu valor máximo nas margens da zona de escorregamento, sendo o componente mais crítico em toda a região de contato. Deve-se lembrar que o componente de tensão σ_{xx} é responsável pelo Modo I de crescimento de trinca (Figura 5).

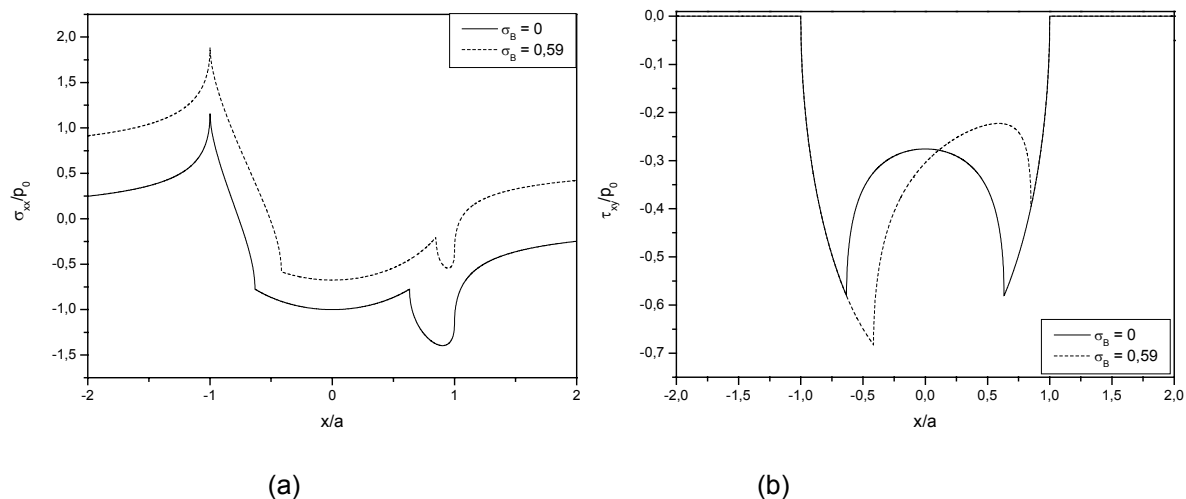


Figura 5 : Distribuição dos componentes de tensão ao longo da superfície ($y/a = 0$) (a) σ_{xx} para $Q = Q_{max}$, (b) τ_{xy} para $Q = Q_{max}$

A presença de tensões axiais cíclicas de fadiga (σ_B) aumenta a severidade do componente σ_{xx} na superfície de contato (Figura 5 a), tendo menor relevância para os outros componentes de tensão gerados. Pode-se observar também que σ_B causa um deslocamento na zona de adesão, mudando a distribuição das tensões de cisalhamento (Figura 5 b), não tendo nenhum efeito sobre a pressão de contato. Este comportamento encontrado quando σ_B está presente no material causa um maior dano na resistência do material, sendo o maior responsável pelo estágio de propagação de trincas de fadiga por *fretting*.^(17,18)

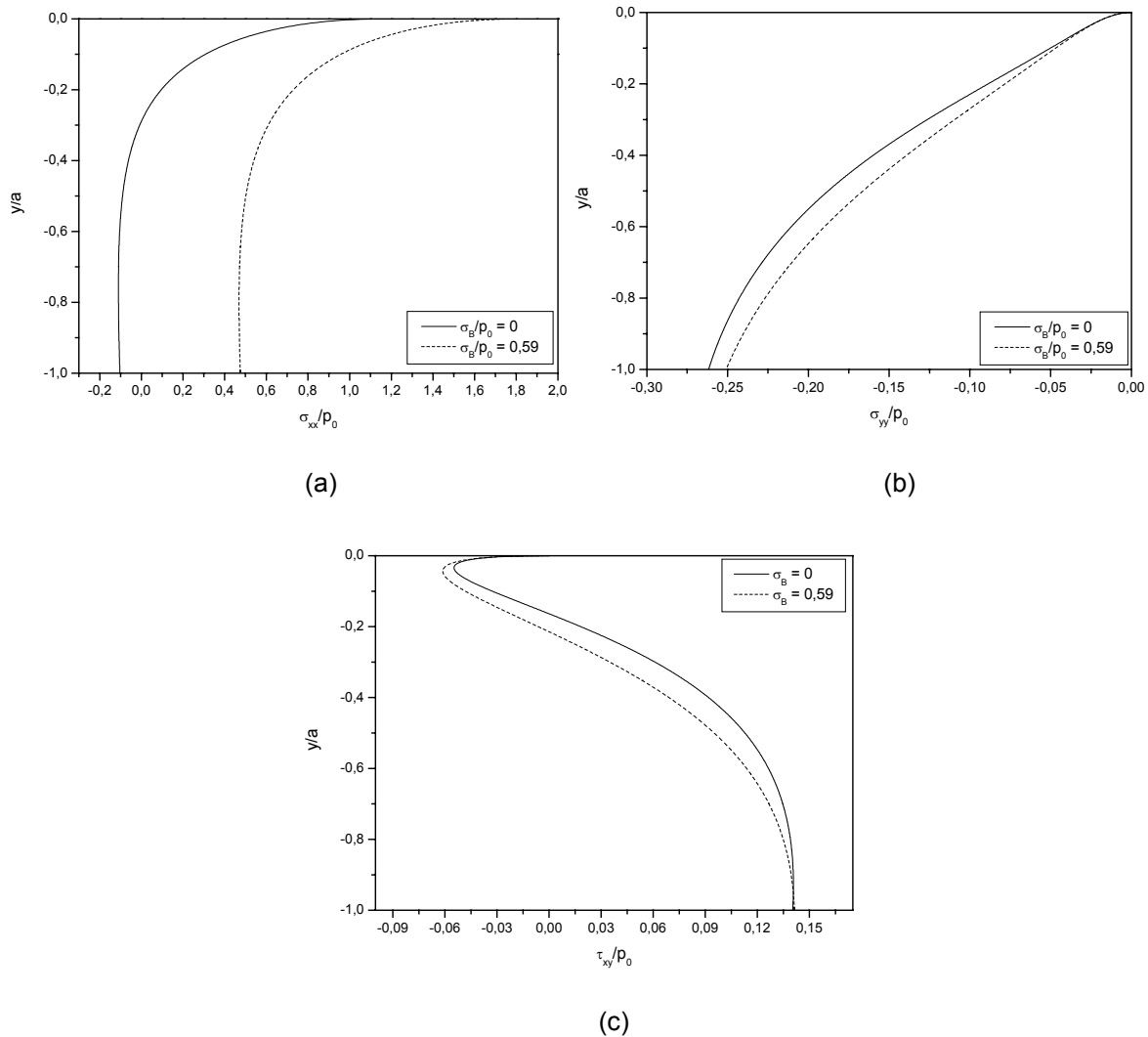


Figura 6: Gradiente de tensão para $Q_{\max}/fp_0 = 0,6$ no ponto crítico do contato ($x/a = -1$) (a) $\sigma_{xx}/p_0 \times y/a$ (b) $\sigma_{yy}/p_0 \times y/a$ e (c) $\tau_{xy}/p_0 \times y/a$

A Figura 6 apresenta a variação das tensões ao longo da profundidade y , na região mais crítica do contato ($x/a = -1$), com e sem a presença da tensão axial cíclica de fadiga. Observa-se que os componentes de tensão apresentam gradientes severos, atingindo valores máximos na superfície, caindo rapidamente a partir desta. A componente de tensão σ_{xx} é máxima na superfície, caindo rapidamente com a profundidade, tornando-se compressivo para o carregamento aqui considerados, quando σ_B é nulo (Figura 6a). Observa-se que o efeito de σ_B em σ_{xx} corresponde no deslocamento de toda a curva σ_{xx}/p_0 para valores, aumentando sua severidade. Os outros componentes de tensão foram pouco sensíveis ao efeito da tensão remota de fadiga (Figuras 6 b e c).

Analisando-se a influência do tamanho do contato e da magnitude da carga normal dentro de uma mesma série de experimentos, para deslizamento parcial, os campos de tensões apresentarão magnitudes diferenciadas, conforme ilustra a Figura 7(a). Quanto menor o tamanho do contato (menor raio de sapata), maior será o gradiente de tensão para o interior do corpo de prova (variando em y). Relacionando-se esta análise com o carregamento normal, um aumento na carga normal diminui acentuadamente a vida em fadiga, quando comparados com o caso de fadiga plana. Porém, de maneira geral, pressões de contato menores causam um aumento na amplitude de deslizamento (conforme equação (6)), em contrapartida,

pressões de contato maiores conduzem a amplitudes de deslizamento menores. Bramhall (20) observou que corpos de prova irão falhar se o gradiente de tensão for suficientemente pequeno de maneira a fornecer condições necessárias ao crescimento da trinca até onde ela possa se propagar somente sob a tensão induzida pela carga axial cíclica de fadiga. Deve ser observado que um aumento na pressão de contato causará um aumento na pressão de pico na região do contato, conforme ilustra a Figura 7b, causando um maior gradiente de tensão no interior do material, retardando o processo de propagação de trincas. Desta forma, quanto menor o tamanho de contato, menos severas são as condições para a propagação de trinca no corpo considerado.

Assim, um aumento na tensão normal (σ_{yy}) aumenta a iniciação precoce de trincas, mas causa um decréscimo na vida de propagação das mesmas ⁽¹⁷⁾

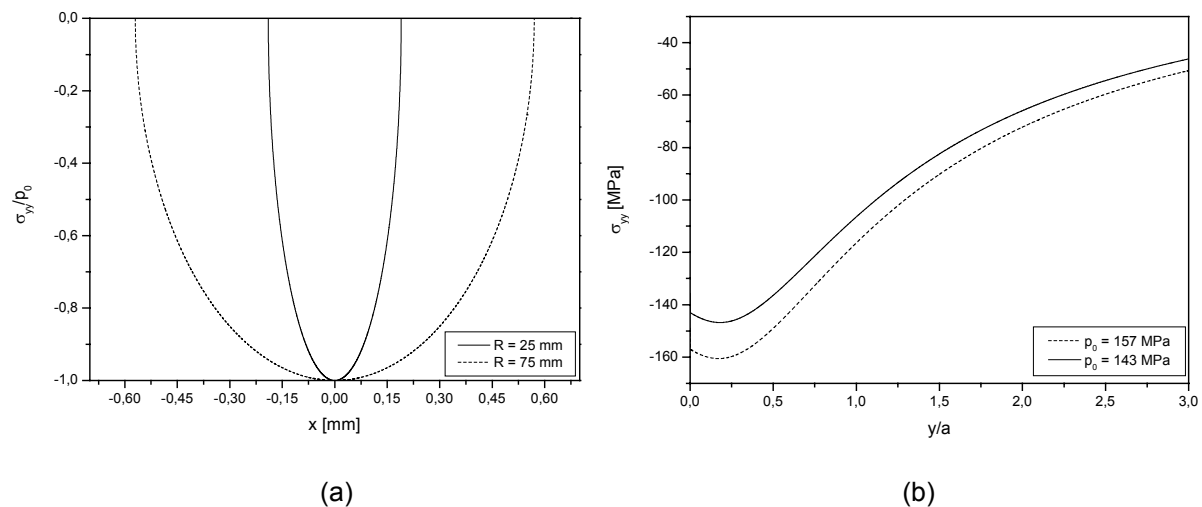


Figura 7: Gráficos (a) distribuição de σ_{yy}/p_0 na superfície ($y = 0$) para diferentes tamanhos de contato e (b) gradiente de σ_{yy} ($x/a = 0$) para um aumento na pressão de contato

5 CONCLUSÃO

Este trabalho analisou a influência do campo de tensão gerado em fadiga por *fretting*, o qual constitui uma ferramenta fundamental para o melhor entendimento do processo de nucleação e propagação de trincas devido à ocorrência simultânea de *fretting* e fadiga. Apesar de trincas serem nucleadas por toda a região de deslizamento, principalmente na região de fronteira entre as zonas de deslizamento/adesão, em que a tensão cisalhante é máxima, as trincas se propagam mais usualmente nas margens da região de contato, influenciadas principalmente pela componente de tensão σ_B e pela componente xx de tensão normal. Na região de contato, o componente de tensão σ_{xx} , que tem um importante papel pelo crescimento de trincas, atinge seu valor máximo nas extremidades da zona de contato, sendo o componente mais crítico em toda a região. A presença de tensões de fadiga aumenta a severidade do componente σ_{xx} na superfície de contato, tendo menor relevância para os outros componentes de tensão gerados. Uma análise da variação de tensão em relação à profundidade na região mais crítica do contato, ou seja na sua extremidade anterior mostra que os componentes de tensão apresentam gradientes severos, atingindo valores máximos na superfície, mas caindo rapidamente a partir desta.

Agradecimento

Ao CNPq, pela bolsa concedida em nível de doutorado e suporte técnico-científico concedido ao trabalho, e a EMBRAER, pelo suprimento de materiais concedidos para a realização da parte experimental do trabalho.

REFERÊNCIAS

- 1 MCDOWELL, J. R. Fretting corrosion tendencies of several combinations of materials, In: Symposium on Fretting Corrosion, ASTM STP 144, Philadelphia, 1953. p. 24 – 39.
- 2 THOMSON D. The national high cycle fatigue (HCF) program. In: Turbine Engines High Cycle Fatigue Conference, W. A. (Ed.), Third Nat., Stain Antonio. Texas, 1998. CD.
- 3 HATTORI, T. Fretting fatigue problems. In: Structural Design Fretting Fatigue, ESIS 18, London: Mechanical Engineering Publication, 1994. p. 437 – 451.
- 4 SHACKELFORD, J. F. Introduction to material science for engineers, New Jersey: Prentice Hall, 4 ed., 1996.
- 5 PEREIRA, L. E. BOSE FILHO, W. W. Propriedades mecânicas de fadiga por fretting do aço inoxidável martensítico DIN x 90 nitretado por plasma para anéis de pistão de motores de combustão interna. Dissertação (mestrado em Ciência e Engenharia de Materiais), São Carlos: USP – Universidade de São Paulo, 2000.
- 6 RAYAPROLUS, D. B., COOK, R. A critical review of fretting fatigue investigation at the royal aerospace establishment, In: Standardization of Fretting Fatigue Test Methods and Equipment, ASTM STP 1159, M. Helmi Attia, R. B. Waterhouse, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992. p. 129 – 152.
- 7 SZOLWINSKI, M. P., FARRIS, T. N. Mechanics of fretting fatigue crack formation, Wear, v. 198, p. 93 – 107, 1996.
- 8 ARAÚJO, J. A. Fatigue initiation life under fretting conditions, In: Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 16., 2001, Uberlândia. COBEM, 2001. CD.
- 9 AMONTONS, G. De la resistance cause dans les machines, Memories de L'Academie Royale, A, p.275 – 282, 1699.
- 10 HILLS, D. A., NOWELL, D. A Critical analysis of fretting fatigue experiments. In: Fretting Fatigue, ESIS 18, London: Mechanical Engineering Publication, 1994. p. 171 – 182.
- 11 MUSKHELISHVILI, N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Gröningen, 1953.
- 12 Nowell, D., Dai, D.N. Analysis of surface tractions in complex fretting fatigue cycles using quadratic programming. ASME Journal of Tribology, v. 120, p. 744 – 749, 1998.
- 13 MUTOH, Y. Mechanisms of fretting fatigue, JSME International Journal, Serie A, v. 38, n. 4, p. 405, 1995.
- 14 WATERHOUSE, R. B. Fretting fatigue, International Materials Reviews, v. 37, 1992.
- 15 SZOLWINSKI, M. P., FARRIS, T. N. Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy, Wear, v. 221, p. 24 – 36, 1998.
- 16 PROUDHON, H., FOUVRY, S., BUFFIÈRE, J-Y. A fretting crack initiation prediction taking into account the surface roughness and the crack nucleation process volume, International Journal of Fatigue, v. 27, p. 569 – 579, 2005.

- 17 ARORA, P. R., JACOB, M. S. D., SALIT, M. S. Experimental evaluation of fretting fatigue test apparatus, *International Journal of Fatigue*, in press, p. 941 – 952, 2007.
- 18 HOEPPNER, D. W. Mechanisms of fretting fatigue . In: *Fretting fatigue*, EISIS 18, London: M Mechanical Engineering Publication, 1994. p. 3 – 19.
- 19 EKBERG, A. Prediction fretting fatigue of railway wheel-axle assemblies. A state - of-the art survey, Sweden: Chalmers, 2004.
- 20 BRAMHALL, R. Studies in fretting fatigue, D. Phil. Thesis, University of Oxford, Oxford, 1973.