

# INSTABILIDADE ELÁSTICA DE UM CILINDRO DE PAREDES FINAS, SUJEITO A CARGA SIMÉTRICA DE COMPRESSÃO AXIAL<sup>1</sup>

Anselmo Monteiro Ilkiu<sup>2</sup>  
Alex Thaumaturgo Dias<sup>3</sup>

## Resumo:

No presente trabalho será apresentado, um modelo matemático, para a análise da instabilidade elástica em um cilindro de paredes finas sujeito a uma carga simétrica de compressão axial. O modelo foi desenvolvido com base nas teorias elásticas utilizando o método da energia e de acordo com os trabalhos desenvolvidos por Timoshenko, Szilard e Sadd. Para a análise dos resultados, foram consideradas, as propriedades geométricas e as propriedades do material do cilindro metálico de paredes finas. Os resultados teóricos são comparados com os resultados obtidos pela simulação numérica, através do programa comercial de elementos finitos Ansys® versão 5.7 no módulo linear. Foram utilizados elementos de casca de formulação elástica. O modelo para a simulação foi criado a partir das dimensões obtidas do modelo matemático.

**Palavras-chave:** Instabilidade elástica; Método da energia; Cilindro de paredes finas.

## ELASTIC INSTABILITY OF A THIN-WALLED CYLINDER SUBJECT TO AXIAL SYMMETRICAL COMPRESSIVE LOAD

### Abstract

This work will be presented a mathematical model for the analysis of elastic instability in a thin-walled cylinder subjected to an axial symmetrical compression load. The model was developed based on the theories using the method of elastic energy and in accordance with the work done by Timoshenko, Szilard and Sadd. For the analysis of results were considered the geometric properties and material properties of thin-walled cylinder. The theoretical results are compared with results obtained by numerical simulation using the commercial finite element program ANSYS® version 5.7 in the linear module. We used shell elements for elastic formulation. The model for the simulation was created from the dimensions obtained from the mathematical model.

**Keywords:** Elastic instability; Energy method; Thin-walled cylinder.

<sup>1</sup> Contribuição técnica ao 66º Congresso Anual da ABM, 18 a 22 de julho de 2011, São Paulo, SP, Brasil.

<sup>2</sup> Professor Doutor do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

<sup>3</sup> Professor Mestre do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Taubaté – UNITAU – Taubaté – SP.

## 1 INTRODUÇÃO

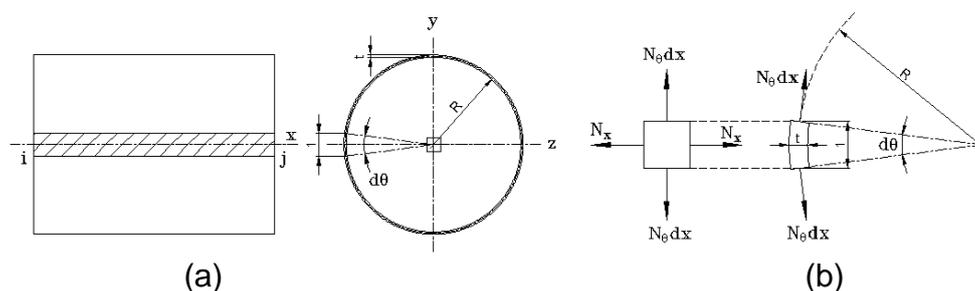
Quando um cilindro de paredes finas está sujeito a uma carga simétrica de compressão axial, deve-se verificar o limite da carga, para que as paredes do cilindro não entrem em instabilidade elástica.

O modelo foi desenvolvido com base nas teorias elásticas utilizando o método da energia e de acordo com os trabalhos desenvolvidos por Timoshenko e Gere<sup>(1)</sup>, Timoshenko e Goodier,<sup>(2)</sup> Szilard<sup>(3)</sup> e Sadd.<sup>(4)</sup> Para a análise dos resultados, foram consideradas, as propriedades geométricas e as propriedades do material do cilindro de paredes finas.

Os resultados teóricos são comparados com os resultados obtidos pela simulação numérica, através do programa comercial de elementos finitos Ansys® versão 5.7<sup>(5)</sup> no módulo linear. Foram utilizados elementos de casca de formulação elástica. O modelo para a simulação foi criado a partir das dimensões obtidas do modelo matemático.

## 2 MATERIAL E MÉTODO

Analisando-se a deformação simétrica de uma tira  $ij$  de largura unitária cortada de um cilindro de parede fina representada na Figura 1a. O elemento  $dx$  da tira, conforme representado na Figura 1b, está submetido à ação das forças  $N_x$  e  $N_\theta dx$  na superfície neutra.



**Figura 1** – a) Modelo de análise; b) Elemento de casca cilíndrica.

Considerando a força  $N_x$  constante, sendo que a força  $N_\theta$  depende do deslocamento radial na tira  $ij$  durante a deformação do cilindro e da teoria de casca cilíndrica sujeita à flexão, apresentada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger,<sup>(6)</sup> temos:

$$N_x = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad \text{e} \quad N_\theta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (1a,b)$$

Denominando o deslocamento radial de  $\omega$  e a deformação radial de  $\varepsilon_2 = -\omega/R$ , sendo  $R$  o raio da superfície neutra do cilindro. Das Eqs.(1), tem-se que a força  $N_\theta$  será dada por:

$$N_\theta = \nu N_x - \frac{\omega}{R} Et \quad (2)$$

A equação diferencial de uma placa devido as cargas de flexão, tração e ou compressão, conforme Szilard<sup>(3)</sup> e Timoshenko e Woinowsky-Krieger,<sup>(6)</sup> é dada pela equação:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( p + N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \quad (3)$$

Em que  $p$  a carga por unidade de área que atua no plano  $xy$  da placa.

Sendo a tira  $ij$  de largura unitária, verifica-se que o ângulo formado entre suas bordas será igual a  $1/R$  (Figura 1b), que neste caso é igual a curvatura em  $y$ , dada por  $\partial^2 \omega / \partial y^2$ . Em função da simetria de deformação e das condições de contorno assumidas, verifica-se segundo Timoshenko e Gere<sup>(1)</sup> e Reddy,<sup>(7)</sup> que:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0 \quad \text{e} \quad N_{xy} = 0 \quad (4)$$

Substituindo-se as Eqs.(2) e (4) na Eq.(3), resulta na equação diferencial na tira  $ij$ , dada pela equação:

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} = p + \frac{1}{R} \nu N_x - \frac{\omega Et}{R^2} + N_x \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad (5)$$

Sendo:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

Para o cilindro sujeito a uma carga simétrica de compressão axial, a carga crítica de compressão na instabilidade elástica  $N_{cr}$ , pode ser obtida utilizando o método da energia. Conforme Timoshenko e Gere,<sup>(1)</sup> substituindo-se o deslocamento radial  $\omega$  da Eq.(5), por:

$$\omega + \nu \frac{N_x R}{AE} = \omega + \nu \frac{N_x R}{Et} \quad (7)$$

Que considera a participação da carga axial no deslocamento radial, sendo a carga  $N_x$  positiva em compressão. Para  $p = 0$ , resulta na equação diferencial na instabilidade elástica do cilindro de paredes finas, dada pela equação:

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + N_x \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\omega}{R^2} Et = 0 \quad (8)$$

Da teoria de Navier apresentada por Szilard,<sup>(3)</sup> Timoshenko e Woinowsky-Krieger<sup>(6)</sup> e Reddy,<sup>(7)</sup> em que o deslocamento transversal de uma placa retangular de lados  $a$  e  $b$  é dado pela equação:

$$\omega(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

Adaptando-se a Eq.(9) para a tira  $ij$  (Figura 1b). Sendo  $b = Rd\theta$  e  $y = 2\pi R$ , tem-se que:  $\operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = \operatorname{sen} \frac{2n\pi^2}{d\theta} \cong -1$ , porque  $d\theta \rightarrow 0$ .

Reescrevendo a Eq.(9), para  $a = L$  (comprimento do cilindro) e  $W_{mn} = W$ , tem-se:

$$\omega = -W \operatorname{sen}(\xi x) \quad (10)$$

Em que:  $\xi = \frac{m\pi}{L}$  (11)

Derivando a Eq.(10) duas vezes em função de  $x$  e depois mais quatro vezes em função de  $x$ , tem-se:

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = W \operatorname{sen}(\xi x) \xi^2 \quad \text{e} \quad \frac{d^4 \omega}{dx^4} = -W \operatorname{sen}(\xi x) \xi^4 \quad (12)$$

Substituindo-se as Eqs.(12) na Eq.(8), tem-se:

$$D[-W \operatorname{sen}(\xi x) \xi^4] + N_x [W \operatorname{sen}(\xi x) \xi^2] - \frac{Et}{R^2} W \operatorname{sen}(\xi x) = 0 \quad (13)$$

Simplificando-se a Eq.(13), e colocando-se  $N_x$  em evidência, tem-se:

$$N_x = D \xi^2 + \frac{Et}{R^2 \xi^2} \quad (14)$$

Na instabilidade elástica a carga axial de compressão  $N_x$  atinge o valor máximo, sendo assim, derivando-se a Eq.(14) em função de  $\xi$  e igualando a zero, obtem-se a equação de  $\xi$ , dada por:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{Et}{R^2 D}} \quad (15)$$

Substituindo-se a Eq.(15) na Eq.(14) e simplificando, obtem-se a carga crítica de compressão axial e conseqüentemente a tensão crítica de compressão, para o cilindro de paredes finas no início da instabilidade elástica, dadas pelas equações:

$$N_{cr} = \frac{2\pi Et^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad \text{e} \quad \sigma_{cr} = \frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (16a,b)$$

### 3 RESULTADOS

Para a verificação dos resultados, foram executadas as análises analítica e numérica, considerando os materiais isotrópicos e homogêneo dados na Tabela 1:

**Tabela 1 - Materiais**

Item	Descrição	$\sigma_e$ [MPa]	$\sigma_{m\acute{a}x}$ [MPa]	E [GPa]	$\nu$
1	Aço Carbono ASTM A36	250	410	210	0,30
2	Liga de Alumínio 6061-T6	270	310	70	0,33

Considerando-se um cilindro curto de paredes finas, com as extremidades engastadas, de raio da superfície neutra  $R = 0,50$  m e comprimento  $L = 1,0$  m.

#### 3.1 Análise Analítica

Limitando-se a tensão crítica igual à tensão máxima do material, obtem-se os resultados dados na Tabela 2:

**Tabela 2 - Resultados**

Item	Descrição	$t_{m\acute{i}n}$ [mm]	$N_{cr}$ [kN]	$u_x$ [mm]
1	Aço Carbono ASTM A36	1,61	2081	1,96
2	Liga de Alumínio 6061-T6	3,62	3539	4,44

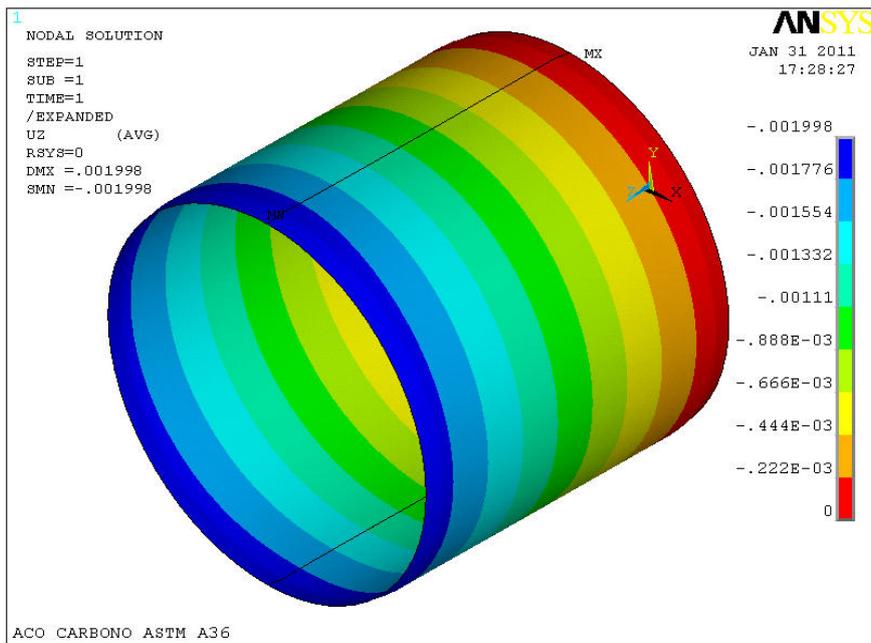
Sendo:  $t_{m\acute{i}n}$  a espessura mínima,  $N_{cr}$  a carga crítica por unidade de comprimento e  $u_x$  o deslocamento axial máximo do cilindro.

#### 3.2 Simulação Numérica

Para a simulação numérica foi utilizado o programa comercial de elementos finitos Ansys® versão 5.7<sup>(5)</sup> no módulo linear, utilizando o elemento de casca SHELL63. Considerando os dados da análise analítica, obtem-se os seguintes resultados:

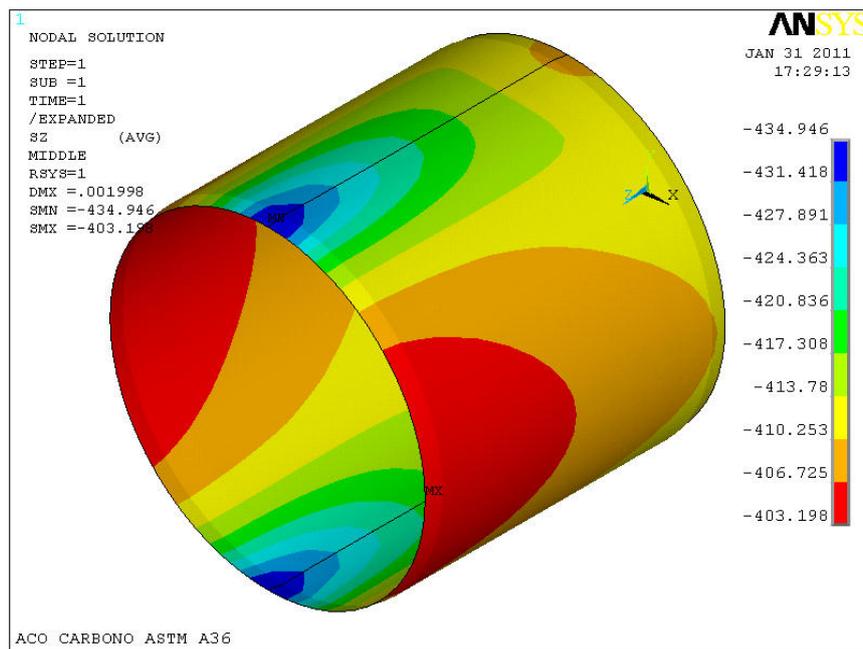
##### 3.2.1 Material 1 – Aço Carbono ASTM A36

Na Figura 3 estão representados os resultados obtidos para o deslocamento axial máximo do cilindro sujeito a carga simétrica de compressão axial de 2.081 kN. O valor máximo obtido é 1,998 mm versus o resultado calculado igual à 1,96 mm.



**Figura 3** – Deslocamento axial máximo do cilindro em m.

Na Figura 4 estão apresentados os resultados obtidos para a tensão axial máxima na superfície neutra da parede do cilindro. O valor médio é 419,07 MPa, equivale à tensão máxima do material igual a 410 MPa.



**Figura 4** – Tensão axial máxima em MPa.

Na Figura 5 tem-se o resultado obtido para instabilidade elástica do cilindro em função da carga axial aplicada. O fator  $FREQ = 0,5676$ , que é a relação entre a carga aplicada e a carga crítica é menor que a unidade indicando que, para as condições assumidas, o cilindro de paredes finas entra em instabilidade elástica provocando a flambagem das paredes.

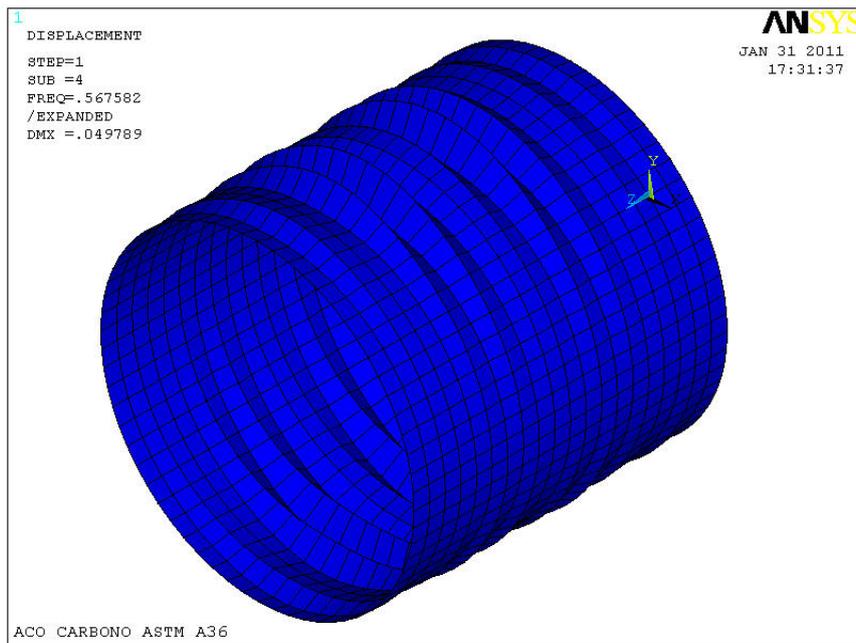


Figura 5 – Instabilidade elástica do cilindro.

### 3.2.2 Material 2 – Liga de Alumínio 6061-T6

Na Figura 6 estão representados os resultados obtidos para o deslocamento axial do cilindro sujeito a carga axial de 3.539 kN. O valor máximo obtido é 4,521 mm versus o resultado calculado igual à 4,44 mm.

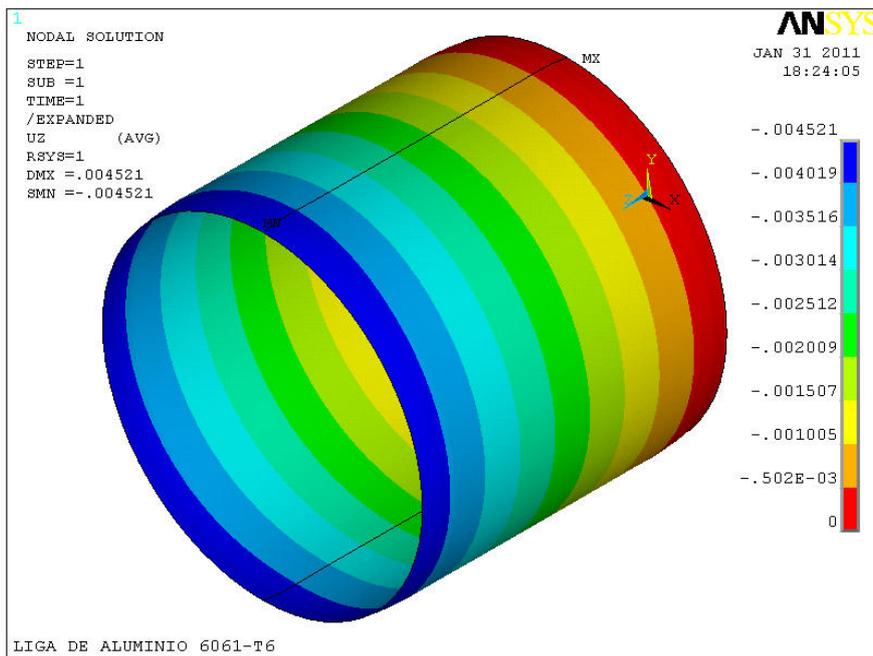
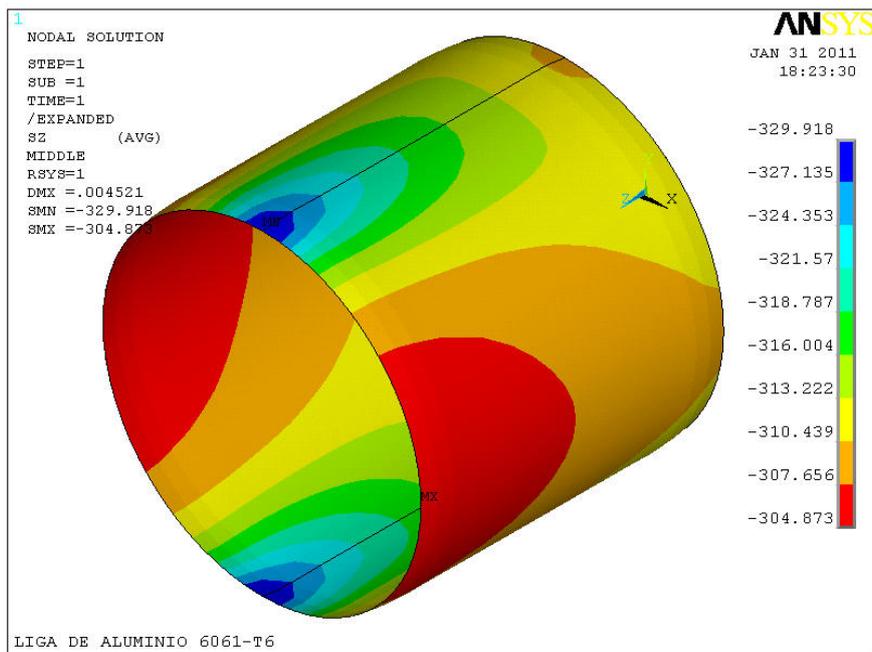


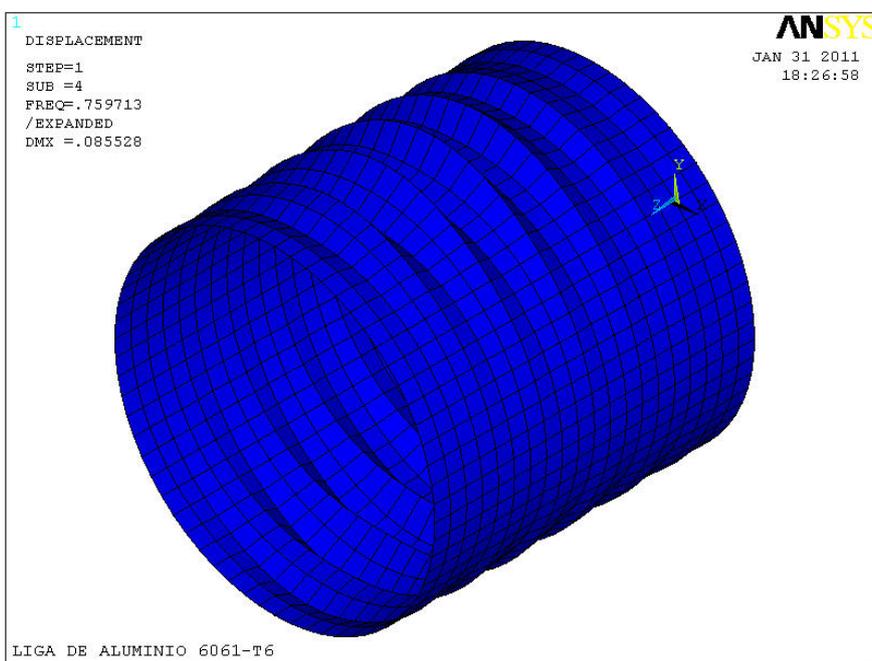
Figura 6 – Deslocamento axial máximo do cilindro em m.

Na Figura 7 estão apresentados os resultados obtidos para a tensão axial máxima na superfície neutra da parede do cilindro. O valor médio é 317,4 MPa, equivale à tensão máxima do material de 310 MPa.



**Figura 7** – Tensão axial máxima em MPa.

Na Figura 8 tem-se o resultado obtido para instabilidade elástica do cilindro em função da carga axial aplicada. O fator  $FREQ = 0,7597$ , que é a relação entre a carga aplicada e a carga crítica é menor que a unidade indicando que, para as condições assumidas, o cilindro de paredes finas entra em instabilidade elástica provocando a flambagem das paredes.



**Figura 8** – Instabilidade elástica do cilindro.

#### 4 DISCUSSÃO

Com base nos resultados obtidos é possível verificar que a instabilidade elástica ocorre com valores da carga crítica menores em relação aos valores calculados, ou seja, aproximadamente 0,57 da carga crítica para o aço carbono ASTM A36 e



0,76 da carga crítica para a liga de alumínio 6061-T6. Confirmando a observação feita por Timoshenko e Gere<sup>(1)</sup> nos ensaios experimentais.

Os desvios apresentados entre os resultados analítico e numérico, para as tensões e deslocamentos axiais, devem-se principalmente ao fato de que no modelo analítico, parte de equações aproximadas, como também é o caso do modelo numérico, porém, este pode ser refinado tendendo ao valor mais próximo do exato de maneira mais efetiva e com menores variações entre os resultados finais.

## 5 CONCLUSÃO

Conclui-se que o modelo apresentado, pode ser utilizado como referência na análise de tubos de paredes finas sujeito a uma carga simétrica de compressão axial. Estudo de caso como tubos metálicos curtos engastados, sujeitos à variação de temperatura, podem ser analisados determinando-se a carga de compressão e se a mesma é menor que 0,6 da carga crítica, dada pela Eq.(16a).

## Agradecimentos

Agradecemos à Universidade de Taubaté pelo apoio financeiro para a apresentação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- 1 Timoshenko S.P. And Gere J.M. **Theory of Elastic Stability**. McGRAW-HILL, International Student Edition – Second Edition,1963.
- 2 Timoshenko S.P. And Goodier J.N. **Theory of Elasticity**, McGRAW-HILL Book Company, Inc. – 1951.
- 3 Szilard R. **Theories and Applications of Plates Analysis**, John Wiley & Sons, Inc. – 2004.
- 4 Sadd M.H. **Elasticity Theory, Applications, and Numerics**, ELSEVIER – 2005.
- 5 Ansys®, 2000, **ANSYS User's Manuals**, Vols. 1(Procedures), 2 (Commands), 3 (Elements) and 4 (Theory), Swanson Analysis Systems Inc.
- 6 Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**, McGRAW-HILL, New York,1959.
- 7 Reddy J.N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**, John Wiley & Sons, Inc. – Second Edition – 2002.